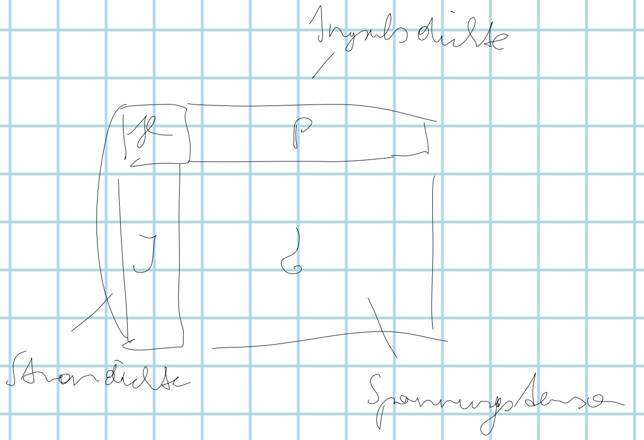
Atomare & Sub-Atom.   06.11.08

Do 20.11.08   keine VO, Ü

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathcal{L} & S = \int d^4x \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \emptyset & \end{array}}$$

$$T_\nu^{\ \mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \mathcal{L}\,\delta_\nu^\mu \qquad \delta_\nu^{\ \mu} = \begin{cases} 1 & \nu = \mu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Energie / Impuls Tensor



$$\partial_\mu T^{\ \mu}_\nu = \emptyset$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^2\right]$$

Klein Gordon Feld

Bosonenfelder

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2 = \emptyset}$$

KG-Gleichung (für freies T)

Lorenz-Invariant / Indizes kontrollieren

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 + m^2\right)\phi = \emptyset$$

Lösungs-Ansatz

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left[\frac{a_k}{\sqrt{2\omega_k}} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} + \frac{a_k^*}{\sqrt{2\omega_k}} e^{-i(\text{—"—})} \right.$$

Einsetzen: $-\omega^2 - (-k^2) + m^2 = \emptyset$ // $\hbar$ & $c = 1$ gesetzt.

$$\longrightarrow \boxed{E^2 = \vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4}$$

a_k sind Amplituden f. WF V ist d. Vol.

$\dot{\phi} = \partial_t \phi$ $H = \int d^3x\, T_0^{\ 0} = *_1$

$$// \ T_0^{\ 0} = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}}_{\text{ausrechnen}} \dot{\phi} - \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2 - (\vec{\nabla}\phi)^2 - m^2\phi^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\phi^2\right]$$

$$= *_1 \int d^3x\, \frac{1}{2}\left[\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla}\phi)^2 + m^2\omega^2\right]$$

Nur diesen Term beachten!!

$$= \int d^3x \left[e^{-2i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \frac{a_k^2}{2\omega_k} + \frac{2 a_k a_k^*}{2\omega_k} + \frac{(a_k^*)^2}{2\omega_k} e^{-2i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right]$$

$$\text{NR}: \int d^3x \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \frac{a_{\vec{k}}\, a_{\vec{k}'}}{\sqrt{2\omega_k \omega_k'}}\, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)}\, e^{i(\vec{k}'\vec{r} - \omega_{k'} t)}$$

$$\vec{k} = \vec{k}' \qquad \delta(\vec{k} - \vec{k}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3x\, e^{i(\vec{k} - \vec{k}')\vec{r}}$$

$// \ k^2 + m^2 = \omega^2$

$$// \ T_0^{\ 0} = \frac{1}{2}\left(\omega^2 + \underbrace{k^2 + m^2}_{\omega^2}\right) = \omega^2$$

$$\boxed{\text{Oszillator}: \ H = \sum_k \left(n_k + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega}$$

$$\boxed{\text{Hier}: \ H = \sum_k a_k a_k^* \omega_k \hbar}$$

$\vec{P}$ ausrechnen

$$\vec{P} = \int d^3x \; T_i^{\;0} = \sum_k a_k a_k^* \cdot \vec{k} \cdot \hbar$$

Annehmen $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$$ komplexes Feld!

$$\phi = \underbrace{(\phi_1}_{\text{reell}} + i \underbrace{\phi_2)}_{\text{reell}} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) - m^2 \phi_1^2\right] + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \phi_2)(\partial_\mu \phi_2) - m^2 \phi_2^2\right]}$$

$$\phi^* \phi = \frac{1}{2}(\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) = \frac{1}{2}(\phi_1^2 - (i\phi_2)^2)$$
$$= \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

π^+, π^-

$$\boxed{H = \sum (a_k a_k^* + b_k b_k^*) \hbar \omega_k}$$

3. Elektromagnetische WW

Feldstärke-Tensor $\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$

einer Abelschen Eichtheorie

Eichsymmetrie $U(1)$ $e^{i\alpha(x)}$

$$e^{i\alpha(x)} \cdot e^{i\beta(x)} = e^{i\beta(x)} e^{i\alpha(x)}$$

$\rightarrow$ Abelsche Gruppe // Geht bei Drehmatrizen nicht!!

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Maxwell Gl.

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0 \quad \text{hom.}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

inhom. — Stromdichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \underbrace{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\text{Lorentzskalar}} - j^\mu A_\mu$$

Term f. quellenfr. Raum

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu = 0 \qquad // \text{ aus } \delta S = \delta \int d^4x \, \mathcal{L}$$

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi \qquad // \text{ Eichfreiheit}$$

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu \chi = F^{\mu\nu} \checkmark$$

Aus Maxwell Gleichungen: (aus inh.)

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = j^\nu$$

Eichung: $\boxed{\partial_\mu A^\mu = \emptyset}$ $\rightarrow$ χ nicht mehr frei

Lorenz – Eichung

$$\boxed{\partial_t^2 A^\nu - \vec{\nabla}^2 A^\nu - \partial^\nu (\partial_t A^0 - \vec{\nabla}\vec{A}) = j^\nu}$$

$\boxed{\vec{\nabla}\vec{A} = \emptyset}$ Strahlungseichung

$\rightarrow \vec{k}\,\vec{A} = \emptyset$ $\rightarrow$ Felder stehen normal auf Ausbreitungsr.

$\rightarrow$ transversale Welle

$\partial_\mu F^{\mu 0}$

Ladungsdichte

$$\partial_0 \partial^0 A^0 - \vec{\nabla}^2 A^0 - \partial^0 \partial_0 A^0 + \partial^0 \underbrace{\vec{\nabla}\vec{A}}_{=0} = j^0 = \rho$$

// Coulomb Eich

$$\boxed{A^0(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}$$

// Lsg mit Green Fkt f. A^0

$\phi(\vec{r},t) = A^0(\vec{r},t)$ // vollkommen d. Ladungsdichte bestimmt

$\underbrace{A^1, A^2, A^3}$

es bleiben nur 2 Komponenten unabhängig 3. kommt aus $\vec{\nabla}\vec{A} = \emptyset$

$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$

$$\partial_t^2 \vec{A} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \overbrace{\vec{j} - \partial_t \vec{\nabla} A^0}^{\text{Ladungsf. Raum} = \emptyset}$$

$$\left(\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2\right)\vec{A} = 0$$

Unterschied zu Klein Gordon:

$m = 0$ & Vektorfeld

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\vec{\varepsilon}_\alpha(\vec{k})}{\sqrt{2\omega_k}} \left[a_{k,\alpha} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} + a^*_{k,\alpha} e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right]}$$

2 komponenten

$\vec{\varepsilon}_\alpha(\vec{k})$: Polarisationsvektor

$$T_\nu{}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\lambda)} \partial_\nu A^\lambda - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}$$

Hamiltondichte / Energiedichte ω

$$T_0{}^0 = -F_{0\mu} F^{0\mu} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right) = \mathcal{H}$$

$$\boxed{H = \int d^3x\, \mathcal{H} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha=1}^{2} a^*_{k\alpha}\, a_{k\alpha}\, \omega_k\, \hbar}$$

$\hbar$ = 1 gesetzt

bisher: klassische lokale Feldtheorie!

aber lorenzinvariante

jedoch noch nicht quantisiert!!

$\boxed{\text{Quantisierung}}$

kanonische Quantisierung

$$[\hat{x}, \hat{p}] \sim \frac{\hbar}{2}$$

Operatoren: $[\,]$ klassisch $= 0$ quantenmech: $\neq 0$

a_k & a_k^* werden Ops!

$$\boxed{[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^+] = \delta_{kk'}}$$

$a_k \rightarrow \hat{a}_k$

$a_k^* \rightarrow \hat{a}_{k'}^+$

$$\boxed{[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^+, \hat{a}_{k'}^+] = \emptyset}$$

$$\vec{P} = \sum_{\vec{k},\alpha} a_{k,\alpha} a_{k,\alpha}^* \vec{k} \qquad \hat{x}$$

// Quantisierungsbed. auf $\hat{x}$ & $\hat{p}$ anwenden $\rightarrow$ Quantisierung automatisch auf $\hat{a}$ & $\hat{a}^+$

$\rightarrow$ gleich $\hat{a}$ & $\hat{a}^+$ quantis.

$$H = \sum_{k,\alpha} \hbar \omega_{k\alpha} \frac{1}{2} [\hat{a}_k \hat{a}_k^+ + \hat{a}_k^+ \hat{a}_k] = *_2$$

// Ordnung weiß man nicht — deshalb Mittel

$\hat{a}_k \hat{a}_k^+ + 1$

$$*_2 = \sum_{\vec{k}\alpha} \hbar \omega_{\vec{k}\alpha} \frac{1}{2} [2 \underbrace{\hat{a}_k^+ \hat{a}_k}_{\hat{N}_k} + 1]$$

$\hat{N}_k$ — Besetzungszahlop.

$$= \sum_{\vec{k},\alpha} \left(\hat{N}_{\vec{k},\alpha} + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_{\vec{k},\alpha}$$

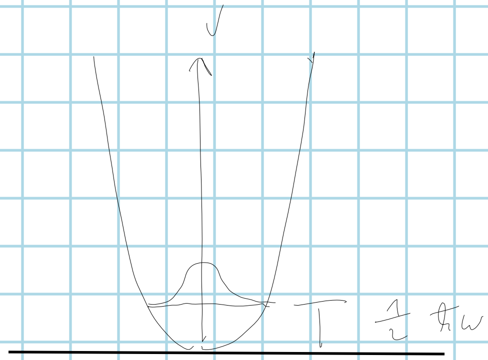
$\boxed{\begin{array}{ll} \hat{a}_k & \text{-- Vernichtungsop.} \\ \hat{a}_k^+ & \text{-- Erzeugungsop.} \end{array}}$

Problem wenn es ∞ viele Moden gibt

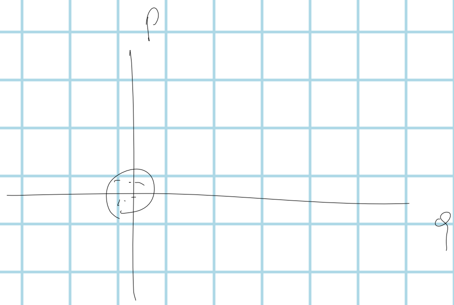
$$\sum_{\vec{k},\alpha} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k},\alpha} \rightarrow \text{divergiert}$$

Nullpunktsenergie

Bei harm Oszillator einfach



$$\sqrt{(\Delta x)^2}\sqrt{(\Delta p)^2} \geq \frac{\hbar}{2}$$



Problem bei unseren Fall hat man ∞ viele Oszis

Wenn makrosk. $\vec{A} = \emptyset$ hat trotzdem jede Mode eine Nullpunktsschw.

$\rightarrow$ Term wird weggelassen!

Nullpunktsschw. wird nicht mehr angesprochen!
(NPS)

$$\boxed{H = \sum_{k,\alpha} \hbar\omega_{k\alpha} \hat{a}_k^+ \hat{a}_k}$$

Nur mehr die Diff der ∞ großen Terme zählt für die Energie

NPS existiert trotzdem zB für Lamb-Shift!!