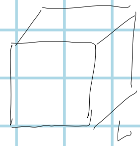
Atomare & Subatomare 13.11.08



$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\lambda} \left[q_\lambda \vec{A}_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} + q_\lambda^* \vec{A}_\lambda^* e^{i\omega_\lambda t} \right]$$

Polarisation

$$\lambda = 1,2 \qquad \vec{A}_\lambda = \vec{\pi}_\lambda \, e^{i\vec{k}_\lambda \vec{r}} \underbrace{\frac{1}{L^{3/2}}}_{\sim \frac{1}{\sqrt{V}}}$$

Polarisationsvektor

Strahlungseichung $\qquad \vec{\nabla}\vec{A} = \emptyset$

$$\varphi = \emptyset$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i \sum_\lambda \omega_\lambda \left[q_\lambda \vec{A}_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} + c.c. \right]$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = i \sum_\lambda \vec{k}_\lambda \times \left[q_\lambda \vec{A}_\lambda e^{-i\omega_\lambda t} + c.c. \right]$$

Energie des Felds: $\qquad E_{Feld} = \frac{1}{2} \int d^3r \left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B} \right) =$

$$\frac{1}{2} \int d^3r \left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) = 2 \varepsilon_0 \sum_\lambda \omega_\lambda^2 \, q_\lambda^* q_\lambda$$

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

$$= \underline{\sum_\lambda \frac{1}{2} \left(P_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 Q_\lambda^2 \right)}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_\lambda &= \sqrt{\varepsilon_0} \left(q_\lambda + q_\lambda^* \right) \\ P_\lambda &= +i \omega_0 \sqrt{\varepsilon_0} \left(q_\lambda^* - q_\lambda \right) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{matrix} \hat{Q}_\lambda \\ \hat{P}_\lambda \end{matrix}$$

$$\underline{\left[\hat{Q}_\lambda , \hat{P}_{\lambda'} \right] = i\hbar \, \delta_{\lambda\lambda'}}$$

kanonische Quantisierung

$$\left(\hat{P}_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 \hat{Q}_\lambda^2 \right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{a}_\lambda^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\lambda}}\left(\omega_\lambda \hat{Q}_\lambda - i\hat{P}_\lambda\right) = \sqrt{\frac{2\omega_\lambda \varepsilon_0}{\hbar}}\ \hat{q}_\lambda^* \\ \hat{a}_\lambda &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\lambda}}\left(\omega_\lambda \hat{Q}_\lambda + i\hat{P}_\lambda\right) = \sqrt{\frac{2\omega_\lambda \varepsilon_0}{\hbar}}\ \hat{q}_\lambda \end{aligned}}$$

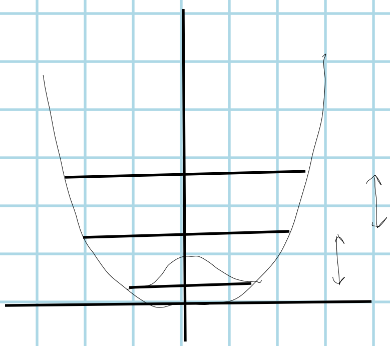
// $[\hat{Q}_\lambda, \hat{Q}_{\lambda'}] = [\hat{P}_\lambda, \hat{P}_{\lambda'}] = \emptyset$

$$\Rightarrow \quad [\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}] = [\hat{a}_\lambda^+, \hat{a}_{\lambda'}^+] = \emptyset$$

$$\left(\hat{P}_\lambda^2 + \omega_\lambda^2 \hat{Q}_\lambda^2\right) = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda\, a_\lambda^+ a_\lambda$$ // siehe vorige Stunde

$\frac{1}{2}$ d. Nullpunktsenergie weggelassen



$\updownarrow$ $\hbar\omega$

$\updownarrow$ $\hbar\omega$

$\updownarrow$ $\frac{1}{2}\hbar\omega$ // Nullpunktsschwingung – Zitterbewegung

Man schaut sich nur Differenzen an, zieht immer den gleichen Term ab – gehts bei linearen Problemen

λ beim Schreiben weglassen:

$a^+|n\rangle$ $\qquad$ $\underbrace{a^+ a}_{N}|n\rangle = n|n\rangle$

$a|n\rangle$ $\qquad$ $[a, a^+] = 1$

$\hat{a}\,|\quad a^+ a|n\rangle = n|n\rangle$

$$\underbrace{a\, a^+}_{a^+ a + 1}\, a|n\rangle = n\, a|n\rangle$$

$$a^+ a\,(a|n\rangle) = (n-1)\,(a|n\rangle)$$

$$a|n\rangle = c|n-1\rangle$$

$$\emptyset \leq \| a|n\rangle \|^2 = \langle n | a^+ a | n\rangle = n \underbrace{\langle n|n\rangle}_{1}$$

$$|c|^2 = n$$

$$\boxed{a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle} \qquad \boxed{a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle}$$

$\rightarrow$ $n = 0, 1, 2, 3$ // bei zB 0,5 bekommt man beim Abstieg Probleme?

λ = fix $\quad \langle n_\lambda | a_\lambda | n'_\lambda\rangle = \sqrt{n'}\,\langle n | n'-1\rangle$

anderer Zustand $\quad = \sqrt{n'}\,\delta_{n,n'-1}$

// $a|n'\rangle = \sqrt{n'}\,|n'-1\rangle$

$$\langle n | a^+ | n'\rangle = \sqrt{n'+1}\,\delta_{n,n'+1}$$

$*_1$

$*_1$: Feldmatrixelemente // Sind nur 1, wenn $n = n' \pm 1$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \sum_\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda \varepsilon_0}} \left(\vec{A}_\lambda\, \hat{a}_\lambda + \vec{A}_\lambda^*\, \hat{a}_\lambda^+ \right)} \quad \text{Feldoperator}$$

Term $e^{-i\omega_\lambda t}$ ist weg $\longrightarrow$ Schrödingerbild

Anderer war im Heisenbergbild

$$\vec{A}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{V}} \vec{\pi}_\lambda \, e^{i \vec{k}_\lambda \vec{r}}$$

Dichte der Photonenzustände

$k_x = \left(\frac{2\pi}{L}\right) n_x$ // kommt aus periodischen RB

k_y —"— n_y

k_z —"— n_z

Dichte: $\sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} = \int dn_x \int dn_y \int dn_z$

// sehr viele Zust.

$$= \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3 k = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int_0^\infty dk \, k^2 \int d\Omega_k = *_2$$

$$*_2 = \underbrace{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{(\hbar\omega)^2}{(\hbar c)^3}}_{\rho_L(E)} d\Omega \, dE$$

$E = \hbar\omega = \hbar k c$

// $\hbar k = \frac{\hbar\omega}{c}$

$k = \frac{\omega}{c}$

Photonendichte in einer Mode

$$\boxed{\hat{H}_{ges} = \hat{H}_{\text{Elektron Bew.}} + \hat{W} + \hat{H}_{\text{Feld}}}$$

neu

H-Atom

$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2\mu} + V$ Elektr. Bew.

$-\frac{\alpha_f \hbar c}{r} + V_{rel}$

$\vec{p} \to \vec{p} + q\vec{A}$ kov. Ableitung

$$H = \frac{(\vec{p} + q\vec{A})^2}{2\mu} + V = \underbrace{\frac{p^2}{2\mu} + V}_{\text{e}^- \text{ Bewegung im Wasserstoff}} + \underbrace{\frac{q}{2\mu}\left(\hat{\vec{p}}\hat{\vec{A}} + \hat{\vec{A}}\hat{\vec{p}}\right)}_{\hat{W} \text{ // Wechselwirkungs-Op}} + \underbrace{\frac{q^2}{2\mu}\hat{A}^2}_{\text{Diamagn. Term vernachlässigt}}$$

$\hat{W}$: zwischen e^- Bewegung & Feld

$\underbrace{\hat{H}_{Feld}}_{\text{haben wir bereits angeschrieben}}$ einführen, sonst gibt es keine Übergänge

$$H_{ges} = \underbrace{\hat{H}_{elektr} + \hat{H}_{Feld}}_{H_0 \text{ // ungestört}} + \underbrace{\hat{W}}_{\text{Störterm}}$$

Störungstheor. Behandlung

$$H_0 |\phi_\alpha\rangle |n_1 \ldots n_\lambda^{*1} \ldots\rangle = \left(\varepsilon_\alpha + \sum_\lambda n_\lambda \hbar\omega_\lambda\right) |\phi_\alpha\rangle |n_1 \ldots n_\lambda \ldots\rangle$$

elektronische Zustände / vorerst Bohrbahnen

α entspr. d. Hauptquantenzahl

*1 n_1 Photonen im 1. Zust.
n_λ Phot. im λ Zust.

1. Ordng. Störungstheorie

$$\Delta E_\alpha^{(1)} = \langle 0 | \langle \phi_\alpha | \hat{W} | \phi_\alpha \rangle | 0 \rangle$$

// im H-Atom

kein Photon

Feldanteil $\begin{cases} \langle \emptyset | a | \emptyset \rangle = \emptyset \\ \langle \emptyset | a^+ | \emptyset \rangle = \emptyset \end{cases}$

steht im $\vec{A}$ von $\hat{W}$ drin

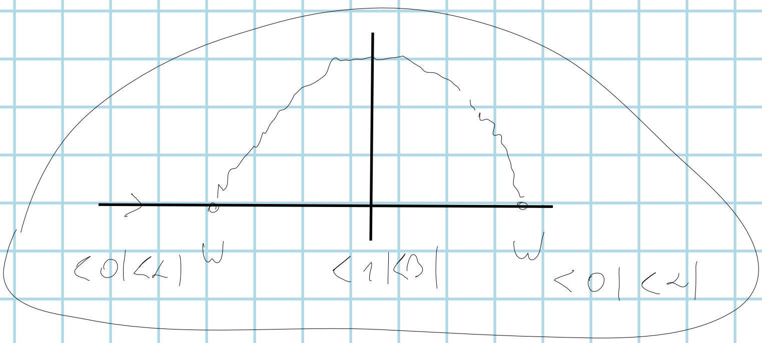
$\Longrightarrow \quad \Delta E_\alpha^{(1)} = \emptyset$ keine Abweichung d. Einwirkung v. Strahlung

$$\Delta E_\alpha^{(2)} = \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{|\langle 0 | \langle \beta | W | \alpha \rangle | n_\beta \rangle|^2}{\underbrace{E_\alpha^0 - E_\beta^0}_{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta - \hbar\omega}} \qquad \sim W^2$$

Es gibt nur da eine Lsg, wo $\langle 1 | a^+ | 0 \rangle = 1$

$\langle 0 | a | 1 \rangle = 1$

man muss einen Übergang mit einem Photon haben



Lamb-Shift

β ist anderer Zustand

Rayleigh Schrödinger Reihe

$$E_\alpha = E_\alpha^0 + \xi E_\alpha^{(1)} + \xi^2 E_\alpha^{(2)}$$

$$|\psi_\alpha\rangle = |\psi_\alpha^0\rangle + \xi |\psi_\alpha^1\rangle + \dots$$

Verbindung in Quanten

<u>Hier: Lösung mit Green Funktionen</u>

$$H = H_0 + W$$

$$H|\psi_a\rangle = E_a|\psi_a\rangle$$

$$H_0|\psi_a^0\rangle = E_a^0|\psi_a^0\rangle \longrightarrow (E_a^0 - H_0)|\psi_a^0\rangle = \emptyset$$

$$G_0(E_a^0)(E_a^0 - H_0) = \mathbb{1}$$

Green Fkt. vom ungest. System

$$\boxed{G_0(E_a^0) = \frac{1}{E_a^0 - H_0}}$$

bekannt

$$\boxed{(E_a^0 - H_0)|\psi_a\rangle = (E_a^0 - E_a + W)|\psi_a\rangle}$$

jetzt exakte Lsg

Projektor einführen $\hat{P} = \mathbb{1} - |\psi_a^0\rangle\langle\psi_a^0|$ // $\hat{P}^2 = \hat{P}$

$$= \sum_{b \neq a} |\psi_b^0\rangle\langle\psi_b^0|$$

$$\Delta E_a = E_a - E_a^0$$

$$\boxed{(\hat{E}_a^0 - \hat{H}_0)|\psi_a\rangle = P(\hat{W} - \Delta E_a)|\psi_a\rangle}$$

$$\boxed{|\psi_a\rangle = G_0(E_a^0)\, P(\hat{W} - \Delta E_a)|\psi_a\rangle}$$

// $P(E_a^0 - H_0)|\psi_a\rangle = (E_a^0 - H_0)|\psi_a\rangle$

$$- \underbrace{\big(E_a^0 - \overbrace{\langle\psi_a^0|H_0|\psi_a\rangle}^{E_a^0}\big)}_{\emptyset}|\psi_a^0\rangle$$

$\langle \psi_a | \psi_a^0 \rangle = 1 \qquad P|\psi_a\rangle = P G_0 P (W - \Delta E)|\psi_a\rangle$

$$|\psi_a\rangle - |\psi_a^0\rangle \underbrace{\langle \psi_a^0 | \psi_a \rangle}_{1} = |\psi_a\rangle - |\psi_a^0\rangle$$

$$\to |\psi_a\rangle = |\psi_a^0\rangle + P G_0 P (W - \Delta E)|\psi_a\rangle$$

iteratives Einsetzen

P projiziert $|\psi_a^0\rangle$ heraus!

$$|\psi_a\rangle = |\psi_a^0\rangle + P G_0 P (W - \Delta E)|\psi_a^0\rangle + P G_0 P (W - \Delta E) \cdot P G_0 P (W - \Delta E)|\psi_a\rangle$$

$(1 - |\psi_a^0\rangle\langle\psi_a^0|)$

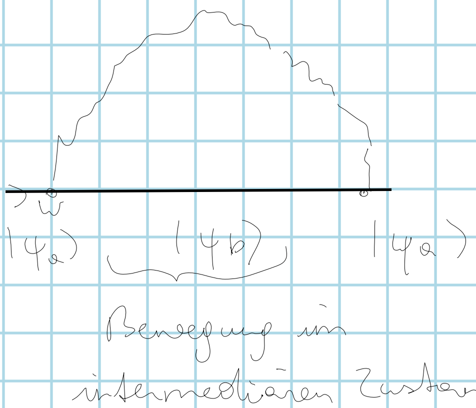
$\sum_{b \neq a} |\psi_b^0\rangle\langle\psi_b^0| \qquad P \Delta E |\psi_a^0\rangle$

$$\Delta E (\mathbb{1} - |\psi_a^0\rangle\langle\psi_a^0|)|\psi_a^0\rangle = \emptyset$$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi_a\rangle = |\psi_a^0\rangle + \sum_{b \neq a} \frac{1}{E_a^0 - E_b^0} |\psi_b^0\rangle\langle\psi_b^0|\hat{W}|\psi_a^0\rangle + \mathcal{O}(W^2)}$$

$$\Delta E_a = \underbrace{\langle \psi_a^0 | W | \psi_a^0 \rangle}_{\text{dieser T} = \emptyset} + \sum_{b \neq a} \langle \psi_a^0 | \hat{W} | \psi_b^0 \rangle \frac{1}{E_a^0 - E_b^0} \cdot \langle \psi_b^0 | \hat{W} | \psi_a^0 \rangle$$

Lamb-Shift



Zeitentwicklungs-Op.

$\Uparrow$

Propagator $\hat{=}$ Greenfunktion

// nur andere Randbed.

Zuerst gibt es kein Feld — mit Quantisierung gibt es eine Nullpunktsschw. und damit ein Feld

Durch die WW mit diesem Feld entsteht ein virtuelles Photon

(virtuell $\to$ $E^2 \neq p^2c^2 + m^2c^4$)

Korrektur 2. Ordnung Störungstheorie mit Δ - Nullpunktss.

$|\alpha\rangle|0\rangle \to |\beta\rangle|1\rangle \qquad |\alpha\rangle|0\rangle$

$$\boxed{\Delta E_\alpha = \sum_{\beta\neq\alpha} \frac{\left|\langle\alpha|\langle 0|\, U\, |1\rangle|\beta\rangle\right|^2}{E_\alpha^0 - E_\beta^0}}$$