Atomare & Subatomare 16.10.08

Lorentztrafo $x^\mu = (x^0, \vec{x})$ $x_\mu = (x^0, -\vec{x})$

$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$ Koord im RS $K'$

$\det(L) = 1$ $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$

Metrik Tensor

Skalare Größen sind invar.

$(\Delta s)^2$ ist auch invar.

$= (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2$

$(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2 \Rightarrow \Delta x_\mu \Delta x^\mu = (\Delta s)^2$

Skalarprod: $a_\mu b^\mu$

$a'^\mu b'_\mu$ // Kontraktion $\rightarrow$ Skalar

$= a^\mu b_\mu$

$$\left.\begin{aligned} a'^\mu &= L^\mu{}_\nu a_\nu \\ b'_\mu &= L_\mu{}^\rho b_\rho \end{aligned}\right\} \quad a'^\mu b'_\mu = L^\mu{}_\nu a^\nu L_\mu{}^\rho b_\rho = a^\mu b_\mu$$

$$L^\mu{}_\nu L_\mu{}^\rho = \delta_\nu{}^\rho = \begin{cases} 1 & \nu = \rho \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Levi Civita Tensor $\varepsilon_{ijkl}$

Volumina berechnen: $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} a^\mu b^\nu c^\lambda d^\rho$

$$d^4x = dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = c\,dt\; dx\, dy\, dz = c\,dt\; d^3x$$

Felder: $\rho(x)$ $\vec{A}(x)$

$\psi(\vec{r}, t) \longrightarrow \hat{\psi}(x)$ // Feldoperatoren

Skalarfeld $\phi'(x') = \phi(x)$

$$d\phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \underbrace{dx^\mu}_{\text{kontravar. Vektor}} = \partial_\mu \phi \, dx^\mu$$

Skalar

muss ein kovar. Vektor sein

$$\partial_\mu \phi = \left(\frac{1}{c}\partial_t \phi, \vec{\nabla}\phi\right)$$

$$\partial^\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\partial_t \phi, -\vec{\nabla}\phi\right)$$

$$(\partial_\mu \phi)\partial^\mu \phi = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\phi)^2$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\phi$$

## 1.3 Gruppentheor. Aspekte

Def einer Grp: Menge $\{a, b, c \ldots\} = G$

Operation darauf $\otimes$ // "Multipl."

a) Abgeschlossenheit $a \otimes b = c \in G$

b) $\exists$ Einheitselem. $a \otimes \mathbb{1} = a \quad \forall a \in G$

c) $\exists$ Inverse $a \otimes a^{-1} = \mathbb{1}$

d) Assoziativität $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$

Abelsche Gruppe

$$a \otimes b = b \otimes a$$

Multipl. mit Phasen ($e^{i\varphi}$) ist abelsch

komplexe unimodulare Gr.

<u>Isomorphie</u> $G_1 \quad G_2 \qquad a \in G_1 \qquad b \in G_2$

$$a \Longleftrightarrow b$$

Man kann alle Elemente der einen Gruppe auf die andere abbilden!

kann irgendwas sein

$G_1$ abstrakt // zB Rotation

$G_2$ Gruppe von Matrizen

Bei Isomorphie ist $G_2$ eine Matrixdarst. von $G_1$

Operation muss Op auf Matrizen sein!

$U(1)$ Gruppe aller unitären Matrizen in 1 dim $\quad e^{i\alpha} = \hat{U}(\alpha)$

$SO(3)$ Rotationsgruppe $\quad \hat{U}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = e^{i\alpha_k \hat{J}_k}$

// $O(3)$ mit Spiegelungen

Drehimpuls → Generator der Rotation

$\hat{p}$ ist Generator der Transl.

$\hat{H}$ der zeitl. Transl.

$\hat{J}$: Generator der symm Gruppe

$\alpha_k$: kontinuierliche Phasenparameter

kontinuierliche Gruppe // man kommt mit Drehungen überall hin

$$\left.\frac{\partial \hat{U}}{\partial \alpha_k}\right|_{\alpha=\emptyset} = -i\, J_k$$

// bekommt man die Generatoren

Lie-Gruppen: kontinuierl.

kompakte Gruppe: alle Grenzwerte von Folgen sind wieder Elemente der Gruppe

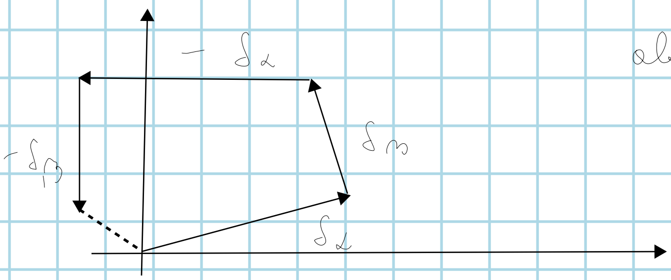
Entwickeln von $U(\alpha)$: // e - Fkt. entw.

$$U(\alpha) = \mathbb{1} - i \sum_{k=1}^{3} \delta_{\alpha k} J_k - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \delta_{\alpha i} \delta_{\alpha j} J_i J_j$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

$U$ sind unitär $\qquad \hat{U}^+ = \hat{U}^{-1}$

$J_k$ sind hermitsch $\qquad J_k^+ = J_k$




abelsch: man kann Op. tauschen und kommt wieder am Anfangsp.

an! Rotationen sind nicht abelsch $\rightarrow$ es bleibt ein Diff - Vektor

$\rightarrow$ Reihenfolge nicht egal!

$$\boxed{[\hat{J}_k, \hat{J}_m] = C_{kml} \hat{J}_l}$$

Strukturkonstante

// Definition einer Algebra die mit einer Gruppe verbun. ist!

$SU(2) \qquad C_{kml} \text{ --- } \varepsilon_{kml}$ // siehe Kommutatorrel. Quanten!

$$[[J_i, J_j], J_k] + [[J_j, J_k], J_i] + [[J_k, J_i], J_j] = 0$$

Jacobi - Identität

$\rightarrow$ allgemein: $\boxed{C_{ijk} = - C_{jik}}$

$$\boxed{C_{ijm} C_{mkn} + C_{jkm} C_{min} + C_{kim} C_{mjn} = \emptyset}$$

Casimir-Operator $\vec{J}^2$ vertauscht mit allen Gruppen-Elementen

Wenn man dreht, kann man $\vec{J}^2$ nicht ändern,

beim Drehen kann man alle Zustände mit gleichem $\vec{J}^2$ abgehen

|| Multiplett

Pauli-Matrizen sind Generatoren

$SU(2)$ spezielle unitäre Gruppe in 2 dim

Matrixdarst. in Form von $2\times 2$ Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{U}(\alpha) = \exp\left(i \alpha^k \sigma^k\right)$$

von $s = \frac{1}{2}$ kommt man nicht auf $s = 1$ !

alles spurlose Matrizen ($\det = 1$)

$U(2)$ : $\mathbb{1}_2$ dazu

Richtung

$$\hat{U}(\alpha) = \cos\alpha \, \mathbb{1}_2 - i \sin\alpha \left(\hat{\alpha} \vec{\sigma}\right)$$

1. Komp. von $\hat{\alpha}$

$$(\hat{\alpha}^1)^2 + (\hat{\alpha}^2)^2 + (\hat{\alpha}^3)^2 = 1$$

$$\alpha^1 = \alpha \hat{\alpha}^1$$

$$\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3)$$

Komponenten von $\hat{\alpha}$

$$e^{i\alpha^k \sigma^k} = \Sigma \ldots = \hat{U}$$

$$= \tilde{U} \begin{pmatrix} e^{i\beta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\beta_2} \end{pmatrix} \tilde{U}^+$$

Trafo zum Diagonal $\longrightarrow$ $\det(\hat{U}) = e^{i(\beta_1 + \ldots \beta_d)}$

$\det(\hat{U})$ muss $=1$ sein $\longrightarrow$ $\beta_1 + \ldots \beta_d = \emptyset$

// wenn man eine SU(n) hat!

$\hat{H}$ // Hamilton $\hat{U}$ // Symmetriegr.

$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ // $\hbar$ ignoriert er oft

$\psi' = \hat{U}(\alpha)\psi$

H invariant unter Transformationen mit $\hat{U}$, wenn

$[H, \hat{U}] = \emptyset \quad \forall\ \hat{U} \in G$

$H\psi_0 = E_0\psi_0$ $\quad \underbrace{\hat{H}\hat{U}\psi_0}_{} = \hat{U}H\psi_0 = \hat{U}E_0\psi_0 = E_0\underbrace{\hat{U}\psi_0}_{}$ Kommut.

// Man kann kein anderes E erreichen!

$H = \hat{H}_0 + \hat{C}(J^2)$ // kann auch Fkt von $J^2$ sein!

// muss so sein wenn H invar. unter Drehungen ist

SU(n) einfachste Darst: $n \times n$ Matrix

$\det \hat{U} = 1$ // Ford. an Gruppenelem.

SU(n) ist Untergr. von U(n)

$\hat{U} = e^{i\alpha}\,\mathbb{1}\,\hat{U}_0$

$\hat{U}_0 \in SU(n)$

U(n)

$SU(3)$ : $\hat{U} = e^{i\alpha_k F_k}$

18 reelle Parameter — 9 el. in Matrix $(3\times 3)$

$9 \times 2$ — jeweils real & Im-Teil

// Basisvektoren bzw. Parameter bei Matrizen

$$\left.\begin{array}{ll} F_k^+ = F_k & \text{9 Bed} \\ \text{Spur } F_k = \emptyset & \text{1 Bed} \end{array}\right\} \Rightarrow 8\ F_a$$

$F_k \quad k = 1 \ldots 8$ $\qquad SU(n)$ : $n^2 - 1$

Konstruktion d. Generatoren

Erweiterung d. 2dim Matrizen

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1 möglicher Satz von Matrizen $\quad \boxed{F_k = \frac{1}{2}\lambda_k}$

$$[F_k, F_l] = \underbrace{f_{klm}}_{\text{Strukturkonst.}} F_m$$