Atomare & Subatomare 23.10.08

Gruppen

$$\hat U(\phi) = \exp(-i\,\phi_\mu \hat J_\mu) = \mathbb{1} + (-i)\,\phi_\mu J_\mu + \frac{(-i)^2}{2}\phi_\mu \phi_\nu J_\mu J_\nu + \dots$$

$\hat J_\mu$ ↓ Generatoren

$$-i\,\hat J_\mu = \frac{\partial U}{\partial \phi_\mu}\Big|_{\phi=0}$$

$$\boxed{U(\delta\phi) = \mathbb{1} - i\,\delta\phi_\mu J_\mu + \frac{(-i)^2}{2}\delta\phi_\mu\,\delta\phi_\nu\,\hat J_\mu \hat J_\nu + \dots}$$

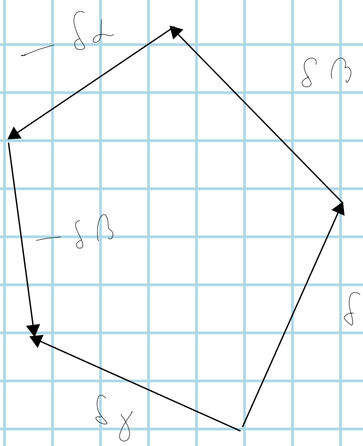
Generatoren müssen lin. unabh. sein!

$$\sum_\mu \delta\phi_\mu \hat J_\mu = 0 \longleftrightarrow \delta\phi_\mu = 0$$

$$\hat U^+(\phi) = U^{-1}(\phi) \Longrightarrow \hat J_\mu^+ = \hat J_\mu$$

Unitarität $\longrightarrow$ Generatoren hermitisch

x Abelsche Gruppe (KEINE!) abel: $\delta\gamma = 0$



$$\hat U(-\delta\beta)\,\hat U(-\delta\alpha)\,\hat U(\delta\beta)\,\hat U(\delta\alpha) = \left(\mathbb{1} + i\,\delta\beta_i J_i - \frac{1}{2}\delta\beta_i\delta\beta_j \hat J_i \hat J_j\right)\left(1 + i\,\delta\alpha_i \hat J_i - \frac{1}{2}\delta\alpha_i\delta\alpha_j \hat J_i \hat J_j + \dots\right)\left(1 - i\,\delta\beta_i \hat J_i - \frac{1}{2}\delta\beta_i\delta\beta_j \hat J_i \hat J_j + \dots\right)\cdot\left(1 - i\,\delta\alpha_i \hat J_i - \frac{1}{2}\delta\alpha_i\delta\alpha_j \hat J_i \hat J_j + \dots\right)$$

$$= *_1$$

$$\hat U(\delta\gamma) = \mathbb{1} - i\,\delta\gamma_\mu \hat J_\mu + \dots$$

$*_1 = \mathbb{1} + \delta\alpha_k \, \delta\beta_m \, [\hat{J}_k, \hat{J}_m] + \dots$

$\| \; \delta\alpha_k \, \delta\beta_m \, [\hat{J}_k, \hat{J}_m] = -i \, \delta\gamma_j \, \hat{J}_j \implies *_2$

Definition: $-i \, \delta\gamma_j = C_{kmj} \, \delta\alpha_k \, \delta\beta_m$

Strukturkonst

$$\boxed{[\hat{J}_k, \hat{J}_m] = C_{kmj} \, \hat{J}_j}$$

Gluonen wechselwirken mit einander

Multipletts

$\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i \, \hat{J}_2$

$L^2 \, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = l(l+1)\hbar^2 \, Y_{lm}$

$\hat{L}_3 \, Y_{lm} = m\hbar \, Y_{lm}$

$\hat{L}_\pm \, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} \; Y_{l\,m\pm 1}(\vartheta, \varphi)$

Leiteroperatoren

Man kann nur innerhalb des Multipletts springen (fest l) Eigenwert des Casimir Operators ist innerhalb gleich! EW: $l(l+1)\hbar^2$ $\hat{L}^2$

$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{F_a = \frac{1}{2} \lambda_a} \qquad F-\text{Spin} \qquad s_a = \frac{\hbar}{2} \sigma_a$$

analogen zu SU(2) Spin

Generatoren der SU(3)

$$[\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j] = 2i\, f_{ijk}\, \hat{\lambda}_k \qquad [\hat{F}_i, \hat{F}_j] = i\, f_{ijk}\, \hat{F}_k$$

irgendwas

analog zu C_{nmj} // Strukturkonstante der SU(3)

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3} \delta_{ij} \mathbb{1} + 2 d_{ijk} \lambda_k$$

siehe Tabelle

SU(2) $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$

ähnlich Leiter - Op:

$T_\pm = F_1 \pm i F_2 \qquad T_3 = F_3$ // hat mit Isospin zu tun

andere Gruppen:

$V_\pm = F_4 \pm i F_5$ | V - Spin | V_3

$U_\pm = F_6 \pm i F_7$ | U - Spin | U_3

$\}$ Def ↓

$$[T_+, T_-] = 2T_3$$

$$[U_+, U_-] = \frac{3}{2} Y - T_3 = 2U_3$$

$$[V_+, V_-] = \frac{3}{2} Y + T_3 = 2V_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} [T_3, T_\pm] &= \pm T_\pm \\ [T_3, U_\pm] &= \mp \tfrac{1}{2} U_\pm \\ [T_3, V_\pm] &= \pm \tfrac{1}{2} V_\pm \end{aligned}}$$

$$[Y, T_\pm] = \emptyset \qquad [Y, V_\pm] \pm \hat{V}_\pm$$

|| gibt Änderung in Y

$$[Y, U_\pm] = \pm \hat{U}_\pm$$

Casimir Operatoren

$$C_1 = \sum_{i=1}^{8} F_i^2 = \frac{2i}{\sqrt{3}} \sum_{ijk} f_{ijk} F_i F_j F_k$$

$$C_2 = \sum_{ijk} d_{ijk} F_i F_j F_k$$

$$\{T_+, T_-, T_3\} \Longrightarrow \{T_1, T_2, T_3\}$$

Isospin ist geschlossene Unteralgebra der $SU(3)$
$SU(2)$

$$\{U_1, U_2, U_3\}$$

$$\{V_1, V_2, V_3\}$$

Zustand im Multiplett
Q Zahlen

$$\hat{T}_3 |T_3 Y\rangle = T_3 |T_3 Y\rangle$$

$$\hat{Y} |T_3 Y\rangle = Y |T_3 Y\rangle$$

Operator

Experiment

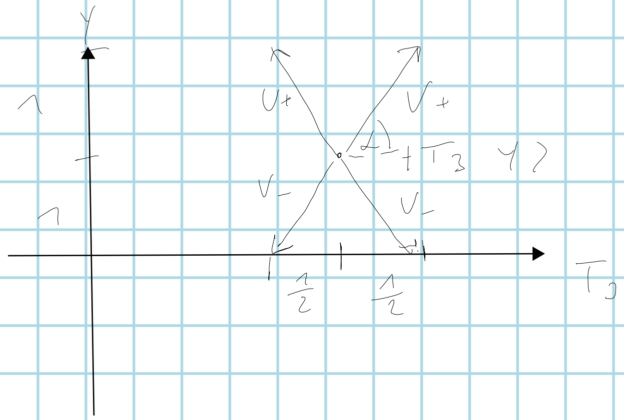
$$\hat T_3 \hat V_\pm |T_3\, Y\rangle - \hat V_\pm \underbrace{\hat T_3 |T_3\, Y\rangle}_{T_3 |T_3\, Y\rangle} = \pm \frac{1}{2} \hat V_\pm |T_3\, Y\rangle$$

$\rightarrow$

$$\boxed{\hat T_3 \hat V_\pm |T_3\, Y\rangle = \left(T_3 \pm \frac{1}{2}\right) \hat V_\pm |T_3\, Y\rangle}$$

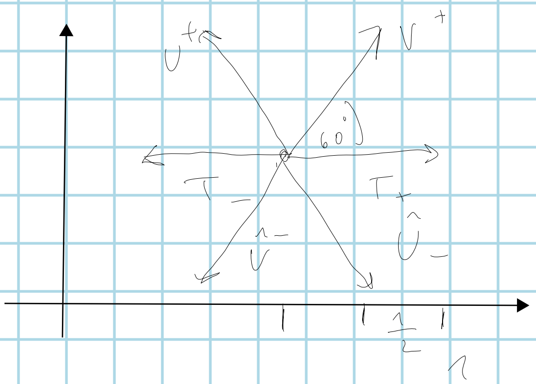
$$\Rightarrow \quad V_\pm |T_3\, Y\rangle \propto |T_3 \pm \frac{1}{2} \quad Y \pm 1\rangle$$

$$\boxed{\hat Y V_\pm |T_3\, Y\rangle = (Y \pm 1) \hat V_\pm |T_3\, Y\rangle}$$



$\alpha = 60°$

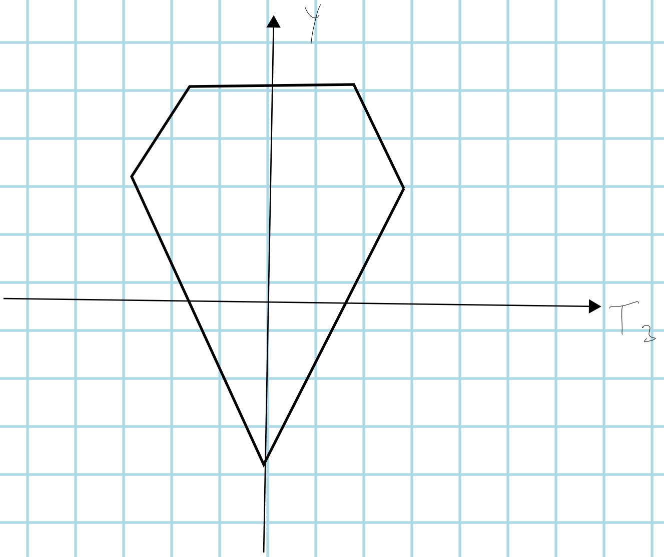
weil $\frac{1}{2}$ nach rechts & 1 nach oben!



Y ist bei Hadronen die Hyperladung, jetzt noch abstrakt!

V^+ geht bis $\frac{1}{2}$

T^+ bis 1!



Klassifizierung der Elementarteilchen

137 Baryonen, 64 Mesonen 1984

~~200~~ (auch schon viele) 1964

p, n, Nukleonen e^- 1930 – 34

Versuchen eine Systematik zu erkennen

64: Σ Sigma Ξ Xsi-Teilchen bekannt n & p →

mit Isospin & Hyperladung aufzeichnen → Form von SU(3)

Multiplett

2. Multiplett Δ (Delta), Σ^*, Ξ^*, Ω^-

Baryonen Multipletts

zuerst nicht bekannt, von Gellman & Neeman vorausgesagt

Mesonen: keine Oktetts sondern Nonetts 9 Teilchen

Mitte: η Etha T & Y Ypsilon π^0 Pi $\emptyset$

Ist ein Oktett & ein Singulett → SU(3)

1. Non: skalar

2. Non: Vektormesonen 3. Nonett: pseudoskalar

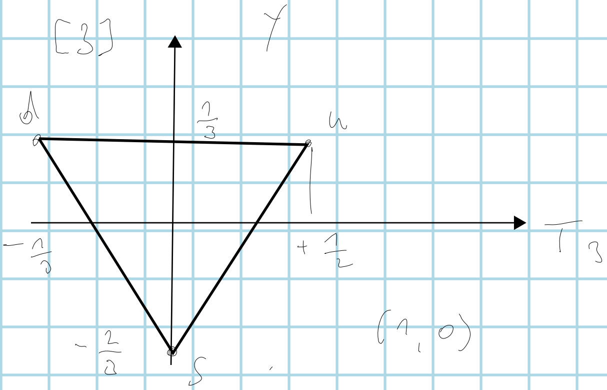
Symmetrie der 3 in der Mitte ist unterschiedl. →

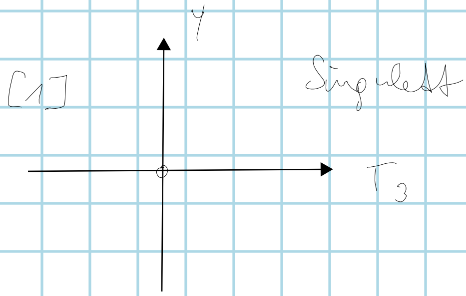
Zuordnung zu Singulett & Oktett

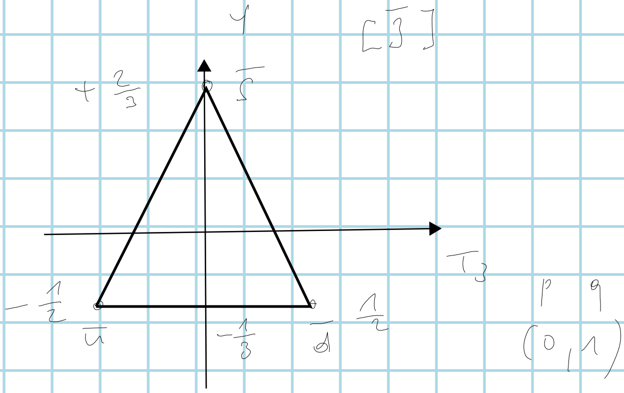
Quarks 3 Quarks $\underbrace{u, d}_{\text{Isospin}}$ s — Hyperladung

Änderung von Y (Hyperladung) → andere Energie / Masse!

Elementarstes System







mit $V_\pm$ $U_\pm$ $T_\pm$ kommt man überall hin!!

Zum Aufstellen: $Q = e_0\left(\frac{Y}{2} + T_3\right)$ Gellman / Nishijima

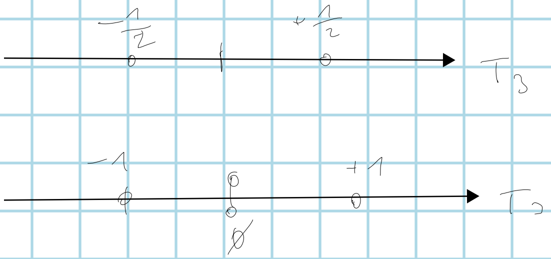
Strich fehlt

$$Q_u = e_0\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = e_0 \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$Q_d = e_0\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3} e_0$$

auf [1] kommt man nicht ??

Gewichtsdiagramme



2 Teilchen: $[2] \otimes [2] = [3] \oplus [1]$

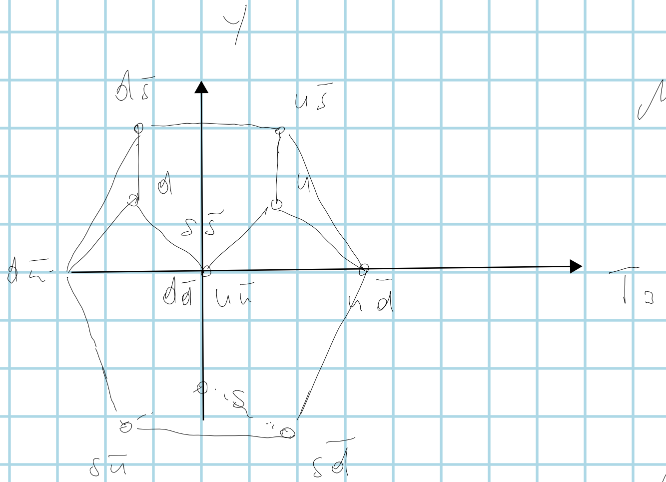
$$\left.\begin{aligned} &|\tfrac{1}{2}\,+\rangle|\tfrac{1}{2}\,+\rangle = |1\;1\rangle \\ &|\tfrac{1}{2}\,-\rangle|\tfrac{1}{2}\,-\rangle = |1\;{-1}\rangle \\ &\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\,-\rangle|\tfrac{1}{2}\,+\rangle + |\tfrac{1}{2}\,+\rangle|\tfrac{1}{2}\,-\rangle\right) = |1\;0\rangle \end{aligned}\right\} \text{Triplet } [3]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\text{–"–} \;-\; \text{–"–} \right) = |0\;0\rangle \quad \text{Singulett } [1]$$

Mesonen $q\bar{q}$ $[3] \otimes [3] = [8] \oplus [1]$

SU(3) Triplett

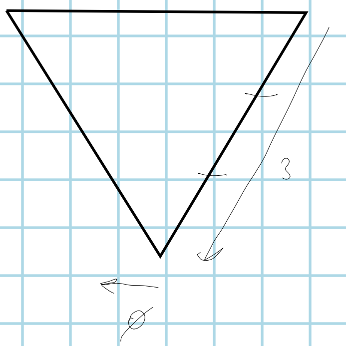
Mesonisches Nonett $\longrightarrow$ Oktett + Singulett



(p, q)

$(1, 1)$

$^{1}(T_3)_{max}$



$(3, 0)$

ins nach links

Es gibt die SU(3) im Flavour- & Farbraum
s, u, d   r, g, b

Oktett im Flavourraum.   Singulett im Farbraum

(p, q) bei max. T anfangen   p runter
q nach links!