Quantentheorie I Vorbereitung

1) Wahrscheinlichkeitsstromd. & Erhaltung d WS

Ansatz ebene Welle

$$\psi(\vec{x},t) = \int d^3k \, f(\vec{k}) \, e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

$$E = \hbar\omega \longrightarrow i\hbar \partial_t$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \longrightarrow \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$$

SGL:

$$i\hbar \partial_t \psi = H\psi$$

freies T: $H = \frac{p^2}{2m} + V \longrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$

$V = e\phi$ // elektr. im $\vec{E}$ - Feld

$$\vec{E} = -\partial_i \phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A} \qquad \vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$$

Hamilton: $\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + q\phi$

Ohne Spin, ohne Relativistik

H hängt von den Potentialen ab, ist also nicht Eich-inv.

$$\phi \rightarrow \phi' - \frac{1}{c}\partial_t \lambda$$

$$\vec{A} \longrightarrow A' + \text{grad}\,\lambda$$

ψ kompensiert mit Phasenwechsel

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{\frac{ie}{\hbar c}\lambda}\psi$$

Nur Betrag von ψ ist beobachtbar!

Wahrscheinlichkeit:

$$\int d^3x \; \rho(\vec{x},t) = 1 \qquad\qquad \rho(\vec{x},t) = |\psi(\vec{x},t)|^2$$

$$\rho = \psi^* \psi \qquad\qquad i\hbar\partial_t \psi = H\psi$$

$$\dot{\rho} = \dot{\psi}^* \psi + \psi^* \dot{\psi}$$

$$= \left(\frac{H}{i\hbar}\psi\right)^* \psi + \psi^* \left(\frac{H}{i\hbar}\psi\right)$$

// hier wirkt H^* nur auf ψ^* /

$$= \frac{1}{i\hbar}\left(\left(-H^* \psi^*\right)\psi + \psi^* H \psi\right)$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + \underbrace{e\phi}_{\text{ohne Poti}}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\nabla - i\underbrace{\frac{e}{c\hbar}}_{g}\vec{A}\Big)^2$$

$$= c\left(\psi \frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla} + ig\vec{A}\right)^2 \psi^* - \psi^* \frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla} - ig\vec{A}\right)^2 \psi\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\Big(\psi\left(\Delta + \vec{\nabla} ig\vec{A} + ig\vec{A}\vec{\nabla} - g^2\vec{A}^2\right)\psi^* -$$
$$\psi^*\Big(\Delta \underbrace{- \vec{\nabla} ig\vec{A} - ig\vec{A}\vec{\nabla}}_{\pm ig\{\vec{\nabla},\vec{A}\}} - g^2\vec{A}^2\Big)\psi\Big)$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left(\psi\left(\Delta + ig\{\,\} - \cancel{g^2\vec{A}^2}\right)\psi^* - \psi^*\left(\Delta - ig\{\,\} - \cancel{g^2\vec{A}^2}\right)\psi\right)$$

$$\{\vec{\nabla},\vec{A}\}\psi^* = \vec{\nabla}\vec{A}\psi^* + \vec{A}\vec{\nabla}\psi^* = \psi^*\vec{\nabla}\vec{A} + \vec{A}\vec{\nabla}\psi^* + \vec{A}\vec{\nabla}\psi^*$$
$$= \psi^*\vec{\nabla}\vec{A} + 2\vec{A}\vec{\nabla}\psi^*$$

$$\{\vec{\nabla},\vec{A}\}\psi = \psi\vec{\nabla}\vec{A} + 2\vec{A}\vec{\nabla}\psi$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\Big(\psi\Delta\psi^* + ig\left(\psi\psi^*\vec{\nabla}\vec{A} + \psi 2\vec{A}\vec{\nabla}\psi^*\right)$$
$$-\psi^*\Delta\psi + ig\left(\psi^*\psi\vec{\nabla}\vec{A} + \psi^* 2\vec{A}\vec{\nabla}\psi\right)\Big)$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\left(\psi\Delta\psi^* - \psi^*\Delta\psi + 2ig\left((\nabla\vec{A})\psi^*\psi + \psi\vec{A}\vec{\nabla}\psi^* + \psi^*\vec{A}\nabla\psi\right)\right)$$

$$\nabla(\psi\nabla\psi^+ - \psi^+\nabla\psi) = \cancel{(\nabla\psi)\nabla\psi^+} + \psi\Delta\psi^+ - \cancel{(\nabla\psi^+)\nabla\psi} - \psi^+\Delta\psi \checkmark$$

$$\rightarrow \frac{\hbar}{2im}\vec{\nabla}\left(\psi\nabla\psi^+ - \psi^+\nabla\psi + 2ig\vec{A}\psi^+\psi\right)$$

$$\rightarrow \dot{\rho} = -\vec{\nabla}\underbrace{\left(\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^+\right) - \frac{e\hbar}{c\hbar m}\vec{A}\psi^+\psi\right)}_{\vec{j}} \checkmark$$

$$\dot{\rho} + \partial_i j_i = \emptyset$$

Gauss: $\frac{\partial}{\partial t}\int_V d^3x\, \rho(\vec{x},t) = -\int_V d^3x\, \partial_i j_i = -\int_{\partial V} j_i\, d^2f_i$

ψ ist normiert deshalb verschw. $\vec{j}$ im ∞

$\rightarrow \partial_t \int_V \rho(\vec{x},t) = \emptyset$!! & $\int \rho(\vec{x},t) = 1$

// weg normierung

2) Zerfließen eines Wellenpakets 1 dim

Free Particle SG

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi$$

Lsg mittels Fourier Trafo

Trafo: $$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ikx}\tilde{\psi}(k)$$

$$\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx}\psi(x)$$

$\psi(x,0) = \psi_0$ // Zeitl. Rand?

// $E = \frac{p^2}{2m}$

$$E = \hbar\omega \rightarrow \quad \omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{\hbar^{\cancel{2}} k^2}{2m\cancel{\hbar}} = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Ansatz $\tilde{\varphi}(k,t) = \tilde{\varphi}(k) \cdot e^{-i\omega t}$ // mit ω

od. Lsg d FP gl. :

$$\varphi'' = -k^2 \varphi$$

$$i\hbar \dot{\tilde{\varphi}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \tilde{\varphi}''$$

$$i\cancel{\hbar} \dot{\tilde{\varphi}} = \frac{\hbar^{\cancel{2}} k^2}{2m} \tilde{\varphi}$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = \frac{\hbar k^2}{i2m} \tilde{\varphi}$$

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{\tilde{\varphi}} = -i\frac{\hbar k^2}{2m} dt \longrightarrow \ln\tilde{\varphi} = -i\frac{\hbar k^2}{2m} t + c$$

$$\tilde{\varphi}(k,t) = c_1 e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m} t}$$

$$\longrightarrow \tilde{\varphi}(k,t) = \tilde{\varphi}(k) e^{-\,''\,-}$$

FT von Gaussian is Gaussian $\longrightarrow$

$$\tilde{\varphi}(k) = \alpha e^{-d^2(k-k_0)^2}$$

$$\psi(x,t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int d^3k \, \underbrace{e^{i(kx-\omega t)}}_{e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t\right)}} e^{-d^2(k-k_0)^2}$$

sortieren $\quad -ak^2 + 2bk - c$

$$ikx - i\frac{\hbar k^2}{2m} t - d^2k^2 + 2d^2 k k_0 - d^2 k_0^2$$

$$-\underbrace{\left(i\frac{\hbar t}{2m} + d^2\right)}_{a} k^2 + 2\underbrace{\left(\frac{ix}{2} + d^2 k_0\right)}_{b} k - \underbrace{d^2 k_0^2}_{c}$$

Quadr. Ergänzung

$$-ak^2 + 2bk - c = -a\left(k^2 - \frac{2b}{a}k\right) - c$$

$$-a\underbrace{\left(k^2 - \frac{2b}{a}k + \frac{b^2}{a^2}\right)}_{\left(k - \frac{b}{a}\right)^2} + \frac{b^2}{a} - c$$

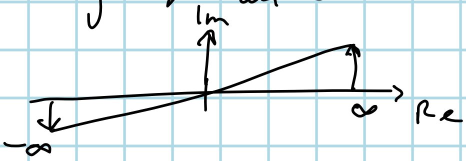
Jetzt kommt d. k nur an 1er Stelle! → substituieren

$$\kappa = \sqrt{a}\left(k - \frac{b}{a}\right)$$

$\frac{b}{a}$ ist komplex!!

$$\frac{d\kappa}{\sqrt{a}} = dk$$

// eig. Grenzen auch ändern.



Bögen im ∞ egal, weil es exp. abfällt!

$$\psi(x,t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{?}^{?} d\kappa \, \frac{1}{\sqrt{a}} \, e^{-\kappa^2 + \frac{b^2}{a} - c}$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{b^2}{a} - c} \underbrace{\int d\kappa \, \frac{1}{\sqrt{a}} \, e^{-\kappa^2}}_{\sqrt{\frac{\pi}{a}}} = \underline{\frac{\alpha}{\sqrt{2a}} e^{\frac{b^2}{a} - c}}$$

$$\|\psi(x,t)\|^2 = \frac{|\alpha|^2}{2|a|} e^{2\,\mathrm{Re}\left(\frac{b^2}{a} - c\right)}$$

[expz:
$$z^* + z = 2\,\mathrm{Re}\, z$$

$$// \; -\underbrace{\left(i\frac{\hbar t}{2m} + d^2\right)}_{a} k^2 + 2\underbrace{\left(\frac{ix}{2} + d^2 k_0\right)}_{b} k - \underbrace{d^2 k_0^2}_{c}$$

$$|a| = \sqrt{d^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2}}$$
$$= d^2 \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{4 d^4 m^2}}$$

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}$$

$$= d^2\sqrt{1+T^2} \qquad a = d^2(1+iT)$$

$$T = \frac{\hbar t}{2d^2 m}$$

$$\left[\begin{array}{l} b^2 = -\frac{x^2}{4} + ixd^2k_0 + d^4k_0 \\ \\ ac = +k_0^2d^2\frac{i\hbar t}{2m} + d^4k_0^2 \end{array}\right.$$

NR: $\frac{b^2 - ca}{a} = \frac{-\frac{x^2}{4} + ixd^2k_0 + \cancel{d^4}k_0 - k_0^2d^2\frac{i\hbar t}{2m} - \cancel{d^4}k_0}{d^2(1+iT)}$

// Nenner Reell machen & dann Realt. nehmen!

$//\cdot(1-iT)$

$$\Big\| \frac{-\frac{x^2}{4} + ixd^2k_0 + k_0^2d^2\frac{i\hbar t}{2m} + \frac{iTx^2}{4} + xd^2k_0T - k_0^2d^2\frac{\hbar t T}{2m}}{N}$$

$$\mathrm{Re}(\ldots) = \frac{-\frac{x^2}{4} + xd^2k_0T - k_0^2d^2\frac{\hbar t T}{2m}}{d^2(1+T^2)}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-x^2 + \cancel{2}4xd^2k_0\frac{\hbar t}{\cancel{2}d^2m} - \cancel{2}k_0^2\frac{\cancel{d^2}\hbar t\,\hbar t}{\cancel{2}m^2\cancel{d^2}}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\left(-x^2 + 2xk_0\frac{\hbar t}{m} - \frac{k_0^2\hbar^2t^2}{m^2}\right)}{N}$$

$$\Big\| v_0 = \frac{\hbar k_0}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{4}\left(-x^2 + 2xtv_0 - v_0^2t^2\right)}{N} = \frac{-\frac{1}{4}(x - v_0t)^2}{N} \checkmark$$

$$\|\psi(x,t)\|^2 = \frac{|\alpha|^2}{2d^2\sqrt{1+T^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-v_0t)^2}{d^2(1+T^2)}}$$

dazgl. wird f. größe + kleiner (siehe 1.T)

Breite d. Vert. nimmt mit. $\sqrt{2}\, d \sqrt{1+T}$ ab

$$\int dx \frac{|\mathcal{L}|^2}{2d^2\sqrt{1+T^2}}\, e^{\frac{-(x-v_0t)^2}{\underbrace{2d^2(1+T^2)}_{a}}} \qquad \int dx\, \rho(x,t) = 1$$

$$K = \frac{(x - v_0 t)}{\sqrt{a}} \longrightarrow \frac{dK}{dx} = \frac{1}{\sqrt{-''-}}$$

$$dx = dK \cdot \sqrt{a}$$

$$\Rightarrow \frac{|\mathcal{L}|^2}{\sqrt{2}\, d^{\cancel{2}}\, \cancel{\sqrt{1+T^2}}}\, \cancel{\sqrt{2}\, d}\, \cancel{\sqrt{1+T^2}}\, \sqrt{\pi} = \frac{|\mathcal{L}|^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\, d} = 1$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{|\mathcal{L}|^2 = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, d}}$$

Berechnen d. Unschärferel:

$$\Delta x =$$

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x\rangle)^2 \rangle$$

$$\langle x\rangle = \int dx\, \psi^* x\, \psi = \int dx\, |\psi|^2 x =$$

$$\int dx\, (\underbrace{x - v_0 t}_{x'})\, |\psi|^2 + v_0 t \underbrace{\int |\psi|^2 dx}_{1}$$

ung. gerade v. x'

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{ung} = \emptyset$$

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x\rangle)^2 \rangle = \underbrace{\int (x - v_0 t)^2 |\psi|^2}_{\int \text{ nicht trivial!}} = d^2(1+T^2)$$

$$\frac{1}{\hbar^2}(\Delta p)^2 = \frac{1}{4d^2} \qquad \Delta x\, \Delta p = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1+T^2}$$

3) Stationäre SGL & geb. Zust. – Kastenpot.

H nicht expl. zeitabh. $\longrightarrow$ Sep. Ansatz f. $\psi(x,t) = u(x)\,v(t)$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V\right]\psi(x,t) = i\hbar\,\partial_t\,\psi(x,t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u''v + Vuv = i\hbar\,u v' \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{uv}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{u''}{u} + V = i\hbar\frac{v'}{v} = E \qquad // \text{ vor div } Euv \,!$$

$$\rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}u'' + Vu = Eu \qquad \Big\} \text{ stationäre SGL}$$

$$i\hbar\,v' = Ev \qquad \text{lösen}$$

$$i\hbar\frac{dv}{dt} = Ev$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{i}{\hbar}E\,dt \longrightarrow v = v_0\,\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}Et}}_{e^{-i\omega t}}$$

v_0: kommt in $u(x)$ rein

$$\rightarrow \quad \psi(x,t) = u(x)\,e^{-i\omega t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = (E - V(x))\,\psi \qquad \text{2 lin. unabh. Lsg}$$

Ansatz: $\psi = e^{\alpha x}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 = E - V$$

$$\alpha^2 = -2m\frac{(E-V)}{\hbar}$$

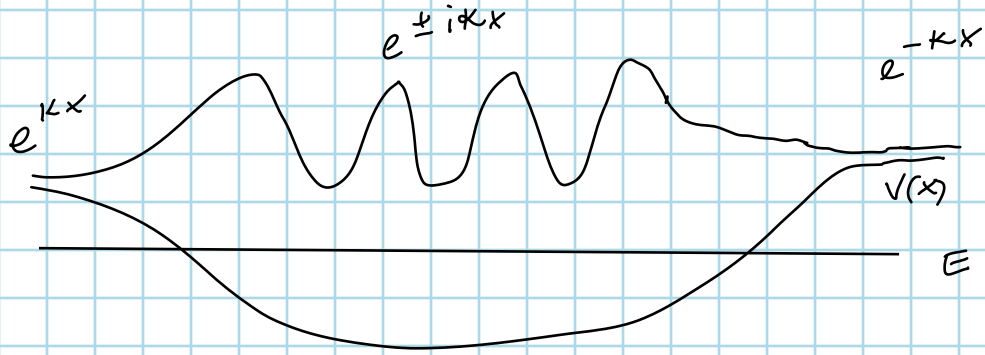
$$K = \pm\sqrt{\frac{2m(E-V)}{\hbar^2}}$$

$E - V > \emptyset$: K $\quad \alpha = iK$

$E - V < \emptyset$: κ $\quad \alpha = \kappa$

$$\kappa = \pm\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$$

$$u(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} = A' \sin(kx) + B' \cos(kx) & E > V \\ C e^{\kappa x} + D e^{-\kappa x} = C' \sinh(\kappa x) + D' \cosh(\kappa x) & E < V \end{cases}$$



oszilliert in $E > V$, sonst ansteigend / abfallend

E erhöhen $\rightarrow$ λ kleiner   Komponente mit exp. Wachstum

nächst. E Level.

$E_1 \, ... \, E_n$ u_n hat $n-1$ Knoten

Parität: positiv $f(x) = f(-x)$

Wenn $H(\vec{x}) = H(-\vec{x}) \rightarrow V(\vec{x}) = V(-\vec{x})$

$\rightarrow u(-\vec{x})$ ist EF f. E wenn $u(\vec{x})$ EF v. E ist

Elt u als gerade & ug. Teil $u = u_+ + u_-$

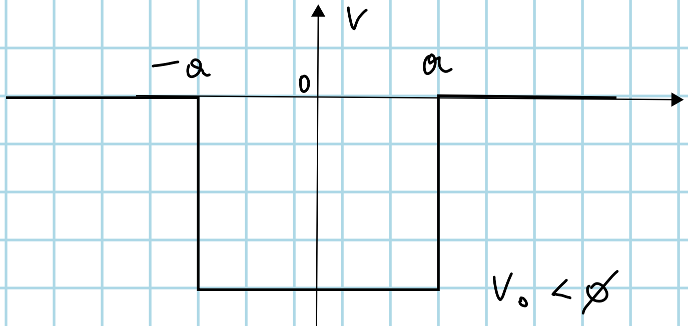
$$u_\pm(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(u(\vec{x}) \pm u(-\vec{x})\right)$$
$$= \pm u(-\vec{x})$$

1 dim: EV sind nicht degeneriert $\rightarrow$ 1 Elt wird $\varnothing$ $\rightarrow$

Parity Symm in 1 dim sagt d. eine EF entw. even od. odd ist !

$\forall$ EF $\rightarrow$ u_1 0 Knoten – gerade

Kasten Potential



$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq a \\ V_0 & |x| < a \end{cases}$$

Anschlussbed.:

stat. SG $\quad -\frac{\hbar^2}{2m} u'' = (E-V)\, u$

$$u'' = \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\, u$$

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} u'' = u'(a+\varepsilon) - u'(a-\varepsilon) = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} (V-E)\, u \, dx$$

u & u' stetig   nur u'' bei $x = a$ unstetig

$$\lim \varepsilon \to 0 \implies \left.\begin{aligned} u'_+(a) &= u'_-(a) \\ u_+(a) &= u_-(a) \end{aligned}\right\}$$

es geht um u, nicht um V!

Andere Potis:

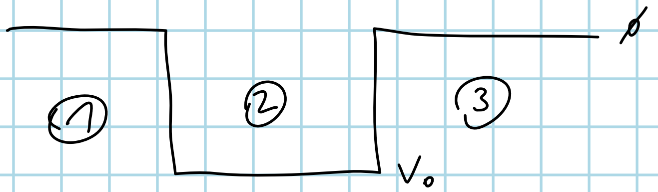
$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x < a \\ \infty & x \geq a \end{cases} \qquad u(x) = 0 \quad x \geq a$$

$$V(x) = V_{alt} + A\,\delta(a) \longrightarrow \begin{cases} u(a_+) - u(a_-) = 0 \\ u'(a_+) - u'(a_-) = A \frac{2m}{\hbar} u(a) \end{cases}$$

Well = Topf !!

Gebundene Zustände im Potentialtopf

$V_0 < E < 0$



Ansätze bekannt

$$u_1(x) = A e^{\kappa x} + B e^{-\kappa x}$$
$$u_2(x) = C e^{ikx} + D e^{-ikx}$$
$$u_3(x) = E e^{\kappa x} + F e^{-\kappa x}$$

1 | 3) $\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V-E)}$ // hier ist $V=0$ & E neg ✓

2) $k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)}$

Normierbarkeit: $B = 0$ $\quad E = 0$ ✓

1) $u_1(-a) = u_2(-a)$ $\qquad$ 3) $u_1'(-a) = u_2'(-a)$

2) $u_2(a) = u_3(a)$ $\qquad$ 4) $u_2'(a) = u_3'(a)$

4 Gl. f. 4 Unbekannte $\rightarrow$ Gl. müssen lin. abh. sein

$\rightarrow$ det von Matrix verschwindet $\rightarrow$ Energieeigenwerte

Leichter: Ausnützen d. Parität EF entw. gerade od. ung. // nur rechte Seite

$$u_{even} = \begin{cases} C' \cos(kx) & 0 < x < a \\ F e^{-\kappa x} & x > a \end{cases}$$

$$u_{odd} = \begin{cases} D' \sin(kx) & — " — \\ F e^{-\kappa x} & — " — \end{cases}$$

Übergang even: $C' \cos(ka) = F e^{-\kappa a}$

$$-k C' \sin(ka) = -\kappa F e^{-\kappa a}$$

$$\rightarrow -k \tan(ka) = -\kappa$$
$$\tan(ka) = \frac{\kappa}{k}$$ ✓

Übergang odd: $D' \sin(ka) = F e^{-\kappa a}$

$$k D' \cos(ka) = -\kappa F e^{-\kappa a}$$

$$\rightarrow \quad \cot(ka) = -\frac{\kappa}{k} \quad \checkmark$$

Koeff berechnen!

even: $A = F$

$C = D$

odd: $A = -F$

$C = -D$

Nehme Koeffs aus d gleichen Gleichung

even $\quad C' \cos(ka) = F e^{-\kappa a}$

$$= A e^{-\kappa a}$$

odd: $\quad D' \sin(ka) = F e^{-\kappa a}$

$$= -A e^{-\kappa a}$$

$$\rightarrow \quad C' = A \frac{e^{-\kappa a}}{\cos(ka)}$$

$$D' = -A \frac{e^{-\kappa a}}{\sin(ka)}$$

$$\rightarrow \quad u_{even} = A \cdot \begin{cases} e^{\kappa x} & x < -a \\ \cos(kx) \cdot \frac{e^{-\kappa a}}{\cos(ka)} & |x| \leq a \\ e^{-\kappa x} & x > a \end{cases}$$

$$u_{odd} = A \cdot \begin{cases} e^{\kappa x} \\ -\sin(kx) \frac{e^{-\kappa a}}{\sin(ka)} \\ e^{-\kappa x} \end{cases}$$

Best. v A durch Normierung!!

$$\int |u|^2 = 1$$

Energien:

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|} \qquad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)}$$

$$k^2 + \kappa^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} V_0 = \frac{2m}{\hbar^2} |V_0|$$

Substitution: $\xi = ka \qquad \eta = \kappa a$

$$\rightarrow \xi^2 + \eta^2 = a^2 \frac{2m}{\hbar^2}|V_0| = R^2$$

even: $\tan ka = \frac{\kappa}{k} \quad | \cdot ak$

$$\xi \tan \xi = \eta$$

odd: $\cot ka = -\frac{\kappa}{k} \quad | \cdot ak$

$$\xi \cot \xi = -\eta$$

Schnittpkte zw Kreis & tan bzw cot Kurven sind Lsg

E ausrechnen: $\frac{\eta^2}{a^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} E \qquad \frac{\xi^2}{a^2} = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$

$$\rightarrow E_n = -\frac{\eta^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

$E_n = -\frac{\xi^2}{a^2}\frac{\hbar^2}{2m} + V_0$?? // egal

3b) Streuung & Tunnel Effekt

Wahrsch. Strom Dichte: // hier kein Vektor-Pot.

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right) \underbrace{- \frac{e}{mc}\vec{A}\psi^*\psi}_{\emptyset}$$

$u_r = A e^{ikx} \qquad u_l = B e^{-ikx}$

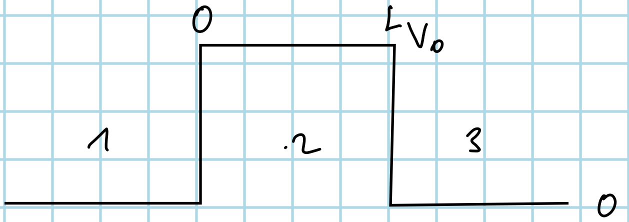
$$j_r = \frac{\hbar}{2im}\left(A^* \cancel{e^{-ikx}} ik A \cancel{e^{ikx}} + A \cancel{e^{ikx}} ik A^* \cancel{e^{-ikx}}\right)$$

// $z^* z = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$

$$j_r = \frac{\hbar}{\cancel{2i}m} \cancel{2i} k |A|^2 = \frac{\hbar k}{m}|A|^2$$

$$j_\ell = -\underbrace{\frac{\hbar k}{m}}_{\text{Geschwindigkeit!}} |B|^2$$

// u_ℓ muss nach links gehen!
→ neg VZ!



$V_0 > 0$

Potential Barrier

$$u_1 = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \qquad x < 0 \qquad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$$

$$u_2 = \begin{cases} F e^{iKx} + G e^{-iKx} & E > V_0 \qquad K = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} = i\kappa \\ F e^{-\kappa x} + G e^{+\kappa x} \quad *_1 & E < V_0 \qquad \kappa = \sqrt{\cdots (V_0 - E)} \end{cases}$$

$$u_3 = C e^{ikx} + D e^{-ikx} \qquad x > L$$

$*_1$ RF der VZ umgekehrt!

$D = \emptyset$ weil nichts nach links geht!!

$$R = \left| \frac{j_{ref}}{j_{ein}} \right| \qquad T = \left| \frac{j_{trans}}{j_{ein}} \right|$$

Keine Parity Symmetry → v $\emptyset$ − L und nicht v
− a bis a!

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} \qquad T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

// j hat $|\ |^2$ drin vom Koeff!

$E > V_0$ $\quad u_1(?) = u_2(?)$
$u_1'(?) = u_2'(?)$

$? = 0$

1) $A + B = F + G$

2) $ik(A - B) = iK(F - G)$

$z = L$

$$\begin{cases} 3)\quad F e^{iKL} + G e^{-iKL} = C e^{ikL} \\ 4)\quad iK(F e^{iKL} - G e^{-iKL}) = ik C e^{ikL} \end{cases}$$

Ges: $\frac{B}{A}$ & $\frac{C}{A}$ // F & G killen!

2) $: iK$ $\quad \frac{k}{K}(A-B) = F - G$

$+ 1) \rightarrow \quad A + B + \frac{k}{K}(A-B) = 2F$

$$A\left(1+\frac{k}{K}\right) + B\left(1-\frac{k}{K}\right) = 2F$$

2. Teil von $2F = \,!$

4) $: iK \,|\quad F e^{iKL} - G e^{-iKL} = \frac{k}{K} C e^{ikL}$

$+ 3) \rightarrow \quad 2F e^{iKL} = C e^{ikL}\left(1+\frac{k}{K}\right)$

$$\rightarrow 2F = C\frac{e^{ikL}}{e^{iKL}}\left(1+\frac{k}{K}\right) = C e^{i(k-K)L}(\text{---}\text{"}\text{---})$$

A)

$$\Rightarrow 2F = A\left(1+\frac{k}{K}\right) + B\left(1-\frac{k}{K}\right) = C e^{i(k-K)L}\left(1+\frac{k}{K}\right)$$

$$\& \quad 2G = A\left(1-\frac{k}{K}\right) + B\left(1+\frac{k}{K}\right) = C e^{i(k+K)L}\left(1-\frac{k}{K}\right)$$

B)

A) : B)

$$\frac{A(\;+\;) + B(\;-\;)}{A(\;-\;) + B(\;+\;)} = \frac{e^{i(k-K)L}(\;+\;)}{e^{i(k+K)L}(\;-\;)}$$

$$\big(A(\;+\;) + B(\;-\;)\big) e^{i(\;+\;)L}(\;-\;) = \big(A(\;-\;) + B(\;+\;)\big) e^{i(\;-\;)L} \cdot (\;+\;)$$

$$\left(A(K^2-k^2) + B(K-k)^2\right) e^{2iKL} = A(K^2-k^2) + B(K+k)^2$$

✓

$$\to \quad A\,(K^2 - k^2)\,(e^{2iKL} - 1) = B\left[(K+k)^2 - (K-k)^2 \cdot e^{2iKL}\right]$$

$$\to \quad \frac{B}{A} = \frac{(K^2-k^2)\,(e^{2iKL} - 1)}{(K+k)^2 - (K-k)^2\, e^{2iKL}} \qquad \begin{matrix} /\cdot -1 \\ /\cdot -1 \end{matrix} \quad \checkmark$$

$$\left.\begin{aligned} (k-K)^2 &= k^2 - 2kK + K^2 \\ (K-k)^2 &= K^2 - 2Kk + k^2 \end{aligned}\right\} =$$

$$|B|^2 = (k^2 - K^2)^2 \left(1 - e^{2iKL} - e^{-2iKL} + 1\right)$$

$$2(\;-\text{"}-\;)^2 \left(1 - \underbrace{\cos(2KL)}_{1 - 2\sin^2 KL}\right)$$

$$= 4(\;-\text{"}-\;)^2 \sin^2 KL$$

$$|A|^2 = \left((k-K)^2 e^{2iKL} - (k+K)^2\right)\left((k-K)^2 e^{-2iKL} - (k+K)^2\right)$$

$$= (k-K)^4 - (k-K)^2 (k+K)^2 e^{2iKL} - (k+K)^2 (k-K)^2 \cdot e^{-2iKL} + (k+K)^4$$

$$= k^4 - \cancel{4k^3K} + 6k^2K^2 - \cancel{4kK^3} + K^4$$

$$- (k-K)^2 (k+K)^2 \underbrace{\left[e^{2iKL} + e^{-2iKL}\right]}_{2\cos(2KL)}$$

$$+ k^4 + \cancel{4k^3K} + 6k^2K^2 \cancel{+ 4kK^3} + K^4$$

$$= 2(k^4 + 6k^2K^2 + K^4) - \left((k-K)(k+K)\right)^2 2\cos(2KL)$$

$$= 2(k^2 + K^2)^2 + 8k^2K^2 \underbrace{- (k^2 - K^2)^2\, 2\cos(2KL)}_{-(k^2-K^2)^2\, 2\,(1 - 2\sin^2(KL))}$$

$$= 2(k^2 + K^2)^2 - 2(k^2 - K^2)^2 + 8k^2K^2 + 4(k^2 - K^2)^2 \sin^2(KL)$$

$$= 2(4k^2K^2) + 8k^2K^2 + 4(k^2-K^2)^2 \sin^2(KL)$$

$$= 16k^2K^2 + 4(k^2-K^2)^2 \sin^2(KL)$$

$$\frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{\cancel{4}(k^2-K^2)^2 \sin^2(KL)}{\cancel{16}\,4\,k^2K^2 + \cancel{4}(k^2-K^2)^2 \sin^2(KL)}$$

$$= \left(1 + \frac{4k^2K^2}{(k^2-K^2)^2 \sin^2(KL)}\right)^{-1} \quad ✓✓$$

Fall ist $E > V_0$ T sieht gleich aus nur mit umg. Bruch

$T = 1$ wenn $V_0 = 0$ od. $\sin(KL) = \varnothing$

$KL = n\pi$

Fall $V_0 > E$ (abfallend)

$K = i\kappa$ einsetzen in $\frac{B}{A}$ und $|\ |^2$ ausr.

$V_0 = 0$ macht hier keinen Sinn! $\sin h$ oszilliert nicht!

$\rightarrow$ keine perfekte T od R!

<u>Transfer & Streumatrix</u>

f $E > V_0$ ausrechnen später kann man $K = i\kappa$ einr. ?

$$1 \rightarrow 2: \quad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

UB bei $x = \varnothing$

$$A + B = F + G$$

$$A - B = \frac{K}{k}(F - G)$$

$$A = \frac{1}{2}\left(F\left(1 + \frac{K}{k}\right) + G\left(1 - \frac{K}{k}\right)\right)$$

$$B = \frac{1}{2}\left(F\left(1 - \frac{K}{k}\right) + G\left(1 + \frac{K}{k}\right)\right)$$

$$\rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\frac{K}{k}\right) & \frac{1}{2}\left(1-\frac{K}{k}\right) \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{K}{k}\right) & \frac{1}{2}\left(1+\frac{K}{k}\right) \end{pmatrix}$$

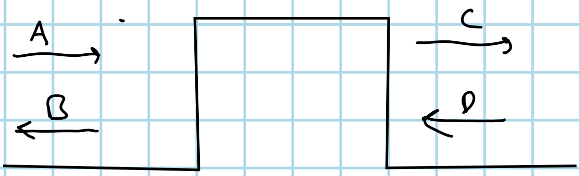
$2 \rightarrow 3$: $$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

Wieder UB jetzt an $x = L$

Rechnung analog $\rightarrow Q$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \underbrace{P\,Q}_{M \ \ldots \ \text{Transfermatrix}} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$$

Streumatrix:



Ziel: $$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

Amp. d. ausl. (B & C) mit Amp. d. einl. (A & D) verb.

$$A = M_{11} C + M_{12} D$$

$$B = M_{21} C + M_{22} D$$

$$C = \frac{A}{M_{11}} - \frac{M_{12} D}{M_{11}}$$

$$\rightarrow \quad B = \frac{M_{21}}{M_{11}} A - \frac{M_{21} M_{12}}{M_{11}} D + M_{22} D$$

$$= \frac{M_{21}}{M_{11}} A + \left(M_{22} - \frac{M_{12} M_{21}}{M_{11}} \right) D$$

$$\rightarrow \quad S = \begin{pmatrix} \frac{M_{21}}{M_{11}} & M_{22} - \frac{M_{12} M_{21}}{M_{11}} \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Hier $D = \emptyset$!

$$\longrightarrow \quad B = S_{11} A = \frac{M_{21}}{M_{11}} A$$

$$C = S_{21} A = \frac{1}{M_{11}} A$$

$$T = \frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{1}{|M_{11}|^2} \qquad R \text{ analog}$$

Beweis, dass S unitär ist:

Teilchen-Erhaltung

$$\longrightarrow \quad |B|^2 + |C|^2 = |A|^2 + |D|^2$$

Schreiben dies: $\quad (A^+ \; D^+) \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} = |A|^2 + |D|^2$

$$(A^+ \; D^+) \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} = (B^+ \quad C^+) \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(B^+ \quad C^+)}_{(A^+ \quad D^+) S^+} S \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S^+ S = \mathbb{1} \qquad \longrightarrow \quad S^+ = S^{-1} \qquad \text{unitär!}$$

$$S^+ S_{11} \leftrightarrow R + T = 1$$

Harmonic Oszillator

$$V = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} \qquad \text{1 dim}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t} \\ & \vec{p} \to \hbar \vec{k} \\ & \quad \to \frac{\hbar}{i} \partial_i \end{aligned}}$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2$$

stat. SG $\quad \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 \right] u(x) = E\, u(x)$

dim - los machen:

Ziel: $\frac{\hbar\omega_0}{2}(p^2 + \xi^2)u = E u$

$$\frac{m\omega_0^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} x^2 = \frac{\hbar\omega_0}{\cancel{2}}\xi^2$$

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\, x$$

// GL mit $-\frac{2}{\hbar\omega_0}$ multipl.

$$\frac{\hbar^{\cancel{2}}}{2\cancel{m}}\frac{\cancel{m}\omega_0}{\cancel{\hbar}} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \qquad \lambda = \frac{2E}{\hbar\omega_0}$$

$$\xi^2 = \frac{m\omega_0}{\hbar}x^2 \qquad \Big| \cdot \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

$$\rightarrow \frac{\cancel{\hbar} m\omega_0^2}{\cancel{\hbar}\,2}x^2 = \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 \qquad \checkmark$$

$$\rightarrow \left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \xi^2 + \lambda\right]u(\xi) = 0$$

Ansatz: $u(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$ asympt. f. $\xi \to \infty$

$$\rightarrow u(\xi) = v(\xi)\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}u(\xi) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(v'(\xi)\left(e^{-\frac{1}{2}\xi^2} - v(\xi)\,e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\xi\right)\right)$$

$$= v''e^{-\frac{1}{2}\xi^2} - v'e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\xi - v'e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\xi$$

$$+ v\,e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\xi^2 - v\,e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

$$\cancel{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - 2\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \cancel{\xi^2} - 1 - \cancel{\xi^2} + \lambda\right]v(\xi) = 0$$

Confluent Hypergeometric DGL

Lsg mit Ansatz: $v(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \xi^\nu$

Potential symm $\rightarrow$ entw even od odd Sol

even: $v(\xi) = v(-\xi)$

$$\rightarrow \quad v(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \xi^{2\nu} \qquad c_\nu = a_{2\nu}$$

1.T

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \xi} v = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu 2\nu \xi^{2\nu-1}$$

nochmal: $\rightarrow \sum_0^{\infty} c_\nu 2\nu(2\nu-1)\xi^{2\nu-2}$

// Trafo: $\nu = \nu+1 \rightarrow$ $\emptyset$-Term ist eh egal

$$\sum_0^{\infty} c_{\nu+1} 2(\nu+1)(2\nu+1)\xi^{2\nu} \quad \checkmark$$

2.T $\quad -2\xi\frac{\partial}{\partial\xi} = -2\xi \sum_0^{\infty} c_\nu 2\nu \xi^{2\nu-1}$

$$= -\sum_0^{\infty} c_\nu 4\nu \xi^{2\nu}$$

3 & 4.T Std...

$$\rightarrow \sum_0^{\infty}\left[c_{\nu+1} 2(\nu+1)(2\nu+1) + c_\nu(\lambda - 1 - 4\nu)\right]\xi^{2\nu} = \emptyset$$

$$\rightarrow \quad c_{\nu+1} = \frac{(4\nu+1-\lambda)}{2(\nu+1)(2\nu+1)} c_\nu$$

$$\frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} \sim \frac{1}{\nu}$$ entspr Quote d. Taylor Reihe v e^{ξ^2}

$$\Rightarrow \quad u = e^{\xi^2} \xi^{2p} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \longrightarrow e^{\frac{\xi^2}{2}} \quad \checkmark$$

Nicht norm.bar f. $|\xi| \rightarrow \infty$

$\Rightarrow$ Reihe muss abbrechen!

Bricht ab, wenn $\quad 4N + 1 = \lambda \qquad N = 0, 1, \ldots$

Summe nur bis N !! $\qquad \lambda = 1, 5, 9$

odd: $\quad v(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \xi^{2\nu+1}$

$\rightarrow \lambda = 4N + 3 \qquad \lambda = 3, 7, 11$

$\rightarrow$ EV $\quad \lambda = 1, 3, 5, 7, 9, 11$

$\lambda = 2n + 1 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

$\rightarrow E = \frac{\hbar\omega_0}{2}(2n+1)$ // siehe Ansatz vorher mit dimensionsl. Op.

$= \underline{\hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)}$

Hermite Gl. Lsg mit Hermite Poly

$$H_n = e^{\frac{\xi^2}{2}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)^n e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$H_0 = 1$

$H_1 = 2\xi$

$H_2 = 4\xi^2 - 2$

$H_3 = 8\xi^3 - 12\xi$ $\qquad u_n(x) = N_n e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} H_n(\alpha x)$

$N_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!}}$

5) Hilbertraum & Ops   Lsp d. SGL formen Hilbert-Raum (WF)

Vektorr. mit Norm $\rightarrow$ Banach-Raum

Konvergenz wichtig weil Raum ggf. ∞-dim sein kann

LK von Lsp. müssen konvergieren

Folge ist konv. wenn Dist v. Mitgliedern und Grenzwert geg. $\emptyset$ geht!   (Cauchy Folge)

Norm: Dreiecks Ungl. & lineare Skalierung

Vollst. Raum auf alle Cauchy Folgen

HR:
$$\|\psi\|^2 = \int d^3x \, |\psi(x)|^2$$
$$= \int d^3x \, \psi^+ \psi$$

// IP ist semi-bilinear!

$$(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi)^*$$ // symm. bis auf komplx konj.

$$(\varphi, \alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \alpha(\varphi, \psi_1) + \beta(\varphi, \psi_2)$$ // lin in 2.
$$(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2, \psi) = \alpha^*(\varphi_1, \psi) + \beta^*(\varphi_2, \psi)$$ // anti-lin

Dual-Vektor: lin. Abb.

$$\vec{x} = x^i e_i$$

kontravar. Koord & Basis

Herm. konj: $\left(\alpha|v\rangle + \beta|w\rangle\right)^+ = \left(\alpha^*\langle v| + \beta^*\langle w|\right)$

Summenk. n. f. obere & untere Idx verw.

$|v\rangle = v^i e_i$

herum kann d. kontravar. Vekt muss n. auto kovar. Vektor sein ist nur bei ortho-Basen so

// $v^i = \langle e^i, v\rangle$

Orthog. Basis : $|e_i\rangle^\dagger = \langle e_i| = \langle e^i|$

Idx d.

$$|v\rangle = |e_i\rangle\langle e^i|v\rangle = \underbrace{\sum_i |e_i\rangle\langle e_i|}_{=1} v\rangle$$

// Projektionsop.

lin Trafo $v^i \to A^i{}_j v^j$

$$A_{ij} = \langle e_i|A|e_j\rangle$$

$$\langle A\rangle_v = \frac{\langle v|A|v\rangle}{\langle v|v\rangle}$$ // Erwartungswert

$$w_i A^i{}_j v_j = (A^T)_j{}^i w_i v_j$$

// Anwendung v. A nach links!

$$\rightarrow \underline{(A^\dagger v, w) = (v, Aw)}$$

sym. bis auf k.k

$$\langle v|A|w\rangle = \langle A^\dagger v|w\rangle = (\langle w|A^\dagger v\rangle)^*$$

$\rightarrow$

$$\langle v|A|w\rangle^\dagger = \langle w|A^\dagger|v\rangle$$

orth Basis : $A_{ij}{}^\dagger = A_{ji}^*$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$(\alpha \langle\varphi| A \dots B|\psi\rangle)^+ = (\alpha^* \langle\psi| B^+ \dots A^+|\varphi\rangle)$$

selbstadj: $A^+ = A \quad \rightarrow \quad a_i = a_i^*$

$A^+ = A$

$$\Rightarrow \quad \langle a_i|A^+ - A|a_j\rangle = \emptyset$$

$$= \langle a_i|A^+|a_j\rangle - \langle a_i|A|a_j\rangle = (a_i^+ - a_j)\langle a_i|a_j\rangle$$

$$= (a_i - a_j)\langle - " - \rangle$$

$\rightarrow$ f. $a_i \neq a_j \qquad \langle a_i|a_j\rangle = \emptyset$!

$$A|a_i, l_i\rangle = a_i|a_i, l_i\rangle \qquad \langle a_i, l_i|a_j, k_j\rangle = \delta_{ij}\,\delta_{l_i k_j}$$

Spektraldarst.: Vollst. - Rel

$$A = \sum_{i, l_i} A|a_i, l_i\rangle\langle a_i, l_i| = \sum_i a_i|\ \rangle\langle\ |$$

$$= \sum_i a_i P_i$$

unitärer OP: $U^{-1} = U^+$

$$\rightarrow \quad U^+U = UU^+ = \mathbb{1}$$

Unitäre Trafo ist Basistrafo:

$$|b_j\rangle = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|b_j\rangle = \sum_i |a_i\rangle U_{ij}$$

Projektionsop.: $P^2 = P \qquad P = P^+$ // hermitisch

$\lambda^2 = \lambda \quad \rightarrow \quad$ EV $\emptyset$ od 1

Spur: $\quad tr\, A = \sum_i A_{ii} = \sum_i \langle e_i | A | e_i \rangle$

$tr\,(AB) = tr\,(BA) \qquad$ invar. geg. zykl. Vertauschung

Erwartungswert $\langle A \rangle$:

$$\langle A \rangle = \sum_i a_i \underbrace{P(a_i)}_{\text{Wahrscheinlichkeit}}$$

$$P(a_i) = \langle \psi | \underbrace{a_i \rangle \langle a_i}_{P_{a_i}} | \psi \rangle = |\langle \psi | a_i \rangle|^2$$

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \langle \psi | \sum a_i |a_i\rangle \langle a_i | \psi \rangle = \sum a_i \, |\langle \psi | a_i \rangle|^2$$

$$\langle a_i | A | a_i \rangle = tr\,(A P_i) = tr\,(P_i A)$$

$$P(a_i) = \langle \psi | P_i | \psi \rangle = tr\,(P_\psi P_i)$$

$$[A, B] = AB - BA$$

$$\{A, B\} = AB + BA$$

Leibnitz Regel

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$$

$$[A, BC] = ABC - BCA$$

Jacobi Identität

$$[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = \emptyset$$

$$[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]] \quad \checkmark$$

A & B herm

$$[A,B]^+ = (AB-BA)^+ = B^+A^+ - A^+B^+ = BA - AB = [B,A] = -[A,B]$$

$$\{A,B\}^+ = \{A,B\} \quad // \text{ hermitsch}$$

$$[A,B]^+ = -[A,B] \quad // \text{ anti h.!}$$

Aufsp.: $AB = \frac{1}{2}\{A,B\} + \frac{1}{2}[A,B]$

Wenn $C^+ = -C$ // antih

dann ist $(iC)^+ = -iC^+ = iC$ // hermitsch!!

→ Aufspaltung in Real & imag-Teil

$[\;]$ realteil? $\{\;\}$ Im?

$[A,B] = \emptyset$ beide gleichz. diagonalisierbar

// Eigenwerte ausrechnen etc. ...

gleiche EW oder vielf. an untersch. Pos.

Fkt von Ops

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \rightarrow f(A) = \sum c_n A^n$$

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}A\right)^n$$

$$|\psi(x,t_0+\delta t)\rangle = |\psi(x,t_0)\rangle + \delta t \underbrace{\partial_t|\psi(x,t_0)\rangle}_{-\frac{iH}{\hbar}\psi} + \ldots$$

$$i\hbar\partial_t\psi = H\psi$$

$$\partial_t\psi = -i\frac{H\psi}{\hbar} \rightarrow \psi(t-t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)H}$$

BCH-Formel

$$e^A e^B = e^{[A,B] + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}([A,[A,B]] - [B,[A,B]]) + \dots}$$

$$e^{\lambda A} B e^{-\lambda A} = B + \sum_1^\infty \frac{\lambda^n}{n!} [A,B]_{(n)}$$

$$[A,B]_{(n+1)} = [A, [A,B]_{(n)}]$$

A hermitsch

$$A = \sum a_i |a_i\rangle\langle a_i|$$

$$\rightarrow f(A) = \sum f(a_i) |a_i\rangle\langle a_i|$$

Verschränkte Zustände

$|p\rangle = |i\rangle$ $\quad i = 1 \dots I$

$|e\rangle = |m\rangle$ $\quad m = 1 \dots M$

$$|i\,m\rangle = |i\rangle \otimes |m\rangle$$

Vektorr. $V_1 \otimes V_2$ lin. Komb. von

$$|w\rangle = \sum_{i,m} w_{im} |i,m\rangle$$

$$\neq \sum c_i |i\rangle \otimes \sum c_m |m\rangle$$

Teilchen beeinfl. sich gegenseitig! (verschränkt)

Cauchyfolge $\quad \|x_m - x_n\| < \varepsilon \quad f \quad \forall\, m,n > N(\varepsilon)$

Banachr.: Vollst., normiert jede CF konvergiert

Hilbertr.: Norm ist IP

$\psi(x) \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ L ... Lebesgue Integr.

quadrat $\int$ komplexe.

Ungleichungen:

$\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$ // Triangle

$\| f \| \cdot \| g \| \geq | \langle f | g \rangle |$