Orts & Impulsdarstellung

Impuls op: $\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \partial_x$ (1 dim)

$|p_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ip}{\hbar}x}$ // EF von Momentum-Op

Norm. $\langle p | p' \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dx \, e^{\frac{i}{\hbar}(p-p')x} = \delta(p-p')$

3 dim: $|\vec{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\,\vec{x}}$

$\langle p | \psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx \, e^{-\frac{i}{\hbar}px} \psi(x) = \tilde{\psi}(p)$

$$\psi(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \, e^{\frac{i}{\hbar}px}}_{|p_x\rangle} \underbrace{\psi(p)}_{\langle p|\psi\rangle}$$

$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \, |p_x\rangle \langle p | \psi \rangle$

$\rightarrow$ Vollständigkeit $\int dp \, |p_x\rangle \langle p_{x'}| = \delta(x-x')$

(früher Summe über Vektoren, jetzt $\int$) !

Spektraldarst:

$A = \sum_i \lambda_i |a_i\rangle \langle a_i|$

jetzt $P = \int p \, |p\rangle \langle p| \, dp$

$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ $\qquad$ $\psi(p) = \langle p | \psi \rangle$

Change from Position to momentum — Trafo-Matrix unitär!

$|p\rangle = \int dx \, |x\rangle \overbrace{\langle x | p \rangle}$

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

$$\int dx\, |\psi(x)|^2 = \int dx\, \langle\psi|x\rangle\langle x|\psi\rangle =$$

$$= \int dx\, \langle\psi \int dp\, |p\rangle\langle p|x\rangle\langle x \int dp'\, |p'\rangle\langle p'|\psi\rangle$$

$$= \int dp \int dp'\, \langle\psi|p\rangle\langle p|p'\rangle\langle p'|\psi\rangle = \int dp\, \langle\psi|p\rangle\langle p|\psi\rangle \checkmark$$

$$\langle x'|X|x\rangle = x\,\delta(x-x') \qquad \langle x'|P|x\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')$$

$$\langle p'|P|p\rangle = p\,\delta(p-p') \qquad \langle p'|X|p\rangle = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p}\delta(p-p')$$

// wenn man n. p ablt. kommt d. x runter !

Spektra / Konvergenz

$$\mathbb{1} = \lim_{n\to\infty} \sum_i^n |e_i\rangle\langle e_i|$$

Vektoren:

Def d. Vollst. — starke Konv.

$$|\psi_n\rangle \to |\psi\rangle \qquad \lim_{n\to\infty} \|\psi_n - \psi\| = 0$$

schwache Konv.:

$$\lim_{n\to\infty} \langle\varphi|\psi_n\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle \qquad \forall \langle\varphi| \in H^{dual}$$

Operatoren

gleichmäßige:
$$\lim_{n\to\infty} \|O_n - O\| = 0$$

starke Konv.
$$\lim_{n\to\infty} \|O_n\psi - O\psi\| = 0 \qquad \forall \psi \in V$$

$O_n\psi$ in W f. alle $\psi \in V$

schwache Konv:

$$\lim_{n\to\infty} |\langle \phi | O_n | \psi \rangle - \langle \phi | O | \psi \rangle| = 0$$

$$\forall\, |\psi\rangle \in \mathcal{H} \quad \& \quad \forall\, \langle\phi| \in \mathcal{H}^{dual}$$

Spektrum: Eigenwerte bei beschr. Ops

$$A_\lambda = A - \lambda \mathbb{1}$$

$$\det A_\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda$$

Probleme bei unbeschränkten

$$\|O\| = \infty$$

$$\|O\| = \sup_{\psi \neq 0} \left(\frac{\|O\psi\|}{\|\psi\|} \right)$$

Resolvente: A_λ^{-1}

unbeschr. Ops können zB nur auf Subset v. Vektoren $\in \mathcal{H}$ def. sein!

→ sie bekommen un Def.-Bereich auf dem sie gelten!

R_λ exist. nicht, wenn es einen Vektor $|\psi\rangle$ gibt f. d. gilt:

$$A_\lambda |\psi\rangle = 0 \quad f. \; |\psi\rangle \in D_A$$

λ ist regulär, wenn R_λ beschränkt

λ ist spektral, wenn —"— unbeschr.

resolventen Satz: alle regulären EV $\quad \rho(A)$

Spektrum: $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho$

1) Punktspektr. : σ_p

alle λ ohne R_λ alle EV mit normierb. EZ

2) kont. Spektr. : σ_c λ f. d. R_λ exist. aber unbeschr. ist!

— Streuzustände

3) residuales : R_λ exist., aber Def.-Bereich nicht dense in $\mathcal{H}$
σ_r

$$\mathbb{C} = \rho + \sigma_c + \sigma_p + \sigma_r$$

Selbstadj. hermitsch : $D_A \subseteq D_A^+$

selfadj : $D_A = D_A^+$

Spektralsatz : $A = \oint |\lambda\rangle \lambda \langle\lambda|$

$$H = \sum |E_n\rangle E_n \langle E_n| + \int dk\, |k\rangle\langle k| \underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}_{E_{kin}}$$

Diskr. Wert auf d. Grenze weggelassen, unter berücks.

Spektralsatz exist. wenn $A^+ = A$ & $\|A\| < \infty$

Ausweiten auf unbeschr. & unit. Op!

Cayley Trafo : $U = (A - i\mathbb{1})\underbrace{(A + i\mathbb{1})^{-1}}_{R_\lambda}$

$U^+ U = \mathbb{1}$

R_λ beschr. weil A reelles Spektrum hat

$$V = \frac{1}{2}(U + U^+) = V^+ \qquad V \text{ selbstadj } \& W$$

$$W = \frac{1}{2i}(U - U^+) = W^+$$

$$[V, W] = \emptyset \qquad // \text{ aus } U^+U = UU^+ \ !$$

$$\boxed{U = V + iW}$$

V & W gem. EB & selbstad → kein Spektrum

$\Rightarrow$ U hat Spektrum. EW v Unit. Op sind $|\lambda| = 1$

$$\rightarrow \lambda = e^{i\theta}$$

$$\longrightarrow \quad U = \oint e^{i\theta} |\theta\rangle\langle\theta| d\theta$$

$$\approx \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} \, dE_\theta$$

$$A = i \frac{1 + U}{1 - U} \qquad // \text{ aus } U = (A - i\mathbb{1})(A + i\mathbb{1})^{-1}$$

Δ in KK kurz mit L

$$\Delta = \frac{1}{r} \partial_r^2 r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta \, \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta} \partial_\varphi^2\right)$$

$$\Delta = \underbrace{\frac{1}{r} \partial_r^2 r}_{} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}$$

$$\frac{1}{r} \partial_r (\partial_r r \psi) = \frac{1}{r} \partial_r (\psi + r \partial_r \psi) = \frac{1}{r}(\partial_r \psi + \partial_r \psi + r \partial_r^2 \psi)$$

$$= \frac{1}{r}(2 \partial_r \psi + r \partial_r^2 \psi) \ \checkmark$$

$$\Delta = \frac{1}{r}\partial_r^2 r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\,\partial_\theta\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\varphi^2\right)$$

Q 2 ergeben sich als Abbruchbed. f. d. Potenzreihenansätze

beim Lösen $\sim$ $u(\vec{x}) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$

$$L^2 Y = l(l+1)\hbar^2 Y$$

$$L_z Y = m\hbar Y$$

$-l \leq m \leq l$ EV l ist $2l+1$ fach entartet!

Schwerpunkt: $\vec{x}_s = \dfrac{m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2}{\underbrace{m_1 + m_2}_{M}}$

reduzierte Masse: $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{M}$

$$\frac{5\cdot 10}{15} = \frac{50}{15} = 3{,}3\ldots \qquad \frac{1\cdot 100}{101} = < 1$$

μ immer kleiner als kleinere Masse

$\vec{p}_s = M\cdot\dot{\vec{x}}_s \approx$ Gesamtimpuls

$\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ // relativ

$\vec{p} = \mu\dot{\vec{x}}$

nur v. Diff abh!

$$H = H_s + H_r = \underbrace{\frac{p_s^2}{2M}}_{SP} + \underbrace{\frac{p^2}{2\mu} + V(\vec{x})}_{\text{relativbew}}$$

Zusätzl. Teilchenindex dazu

$[X_i^\mu, P_j^\eta]$ nur $\neq \emptyset$ wenn $i = j$ & $\mu = \eta$

Elektronen Spin & Pauli Gleichung

Spin FG Basis mit S^2 & S_z diag!

$s = \frac{1}{2}$ // e^- etc.

$|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$ mit $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \simeq |\uparrow\rangle$ // $|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rangle$

$e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \simeq |\downarrow\rangle$

$S_z|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$ $S_+|\uparrow\rangle = \emptyset$

$S_z|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle$ $S_-|\uparrow\rangle = \hbar|\downarrow\rangle$

$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$ $S_+ = \hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$

$S_- = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$

$S_\pm = S_x \pm i S_y \rightarrow S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$

S_y --

$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} & 1\\1 & \end{pmatrix}$ $S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} & -i\\i & \end{pmatrix}$ $S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}$

$(\sigma_i)^2 = \mathbb{1}$ // $\begin{pmatrix} & 1\\1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & 1\\1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ ✓

$\sigma_i\sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad \forall i \neq j$ $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$

$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

$\underline{\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k}$ $\mathrm{tr}\,\sigma_i = \emptyset$

$\mathrm{tr}\,\sigma_i\sigma_j = 2\delta_{ij}$

Magnet Felder / S-O coupling & Pauli Gl.

$$\vec{\mu}_{tot} = \frac{e}{2mc}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right) = \frac{e}{2mc}\left(\vec{L} + \hbar\vec{\sigma}\right)$$

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

$g = 2!$

$$\frac{e\hbar}{2mc} \quad \mu_B$$

magnetisches Moment

$$H_{ind} = \vec{\mu}\vec{B} = \mu_B\left(\frac{\vec{L}}{\hbar} + \vec{\sigma}\right)\vec{B}$$

$$= \frac{\mu_B}{\hbar}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right)\vec{B}$$

$$H_{pauli} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(x) + \frac{\mu_B}{\hbar}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right)\vec{B}$$

$$i\hbar\,\partial_t\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x) + \frac{\mu_B}{\hbar}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right)\vec{B}\right)\psi$$

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix}$$

$\vec{B}$ & $\vec{E}$ von Kern

Coupling: $\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c}\left(\vec{v} \times \vec{E}\right)$

$$\vec{\mu}_e = \frac{e}{\cancel{2}mc}\cancel{2}\vec{S}$$

$\vec{B} \approx \emptyset$ // kern

$$\vec{E} = \frac{1}{e}\frac{dV}{dr}\frac{\vec{x}}{r}$$

$$\rightarrow B' = -\frac{1}{c}\left(\vec{v} \times \frac{1}{e}\frac{dV}{dr}\frac{\vec{x}}{r}\right) = -\frac{1}{ce}\frac{dV}{dr}\frac{1}{r}\underbrace{\left(\vec{v} \times \vec{x}\right)}_{-\frac{L}{m_e}}$$

$$L = \vec{x} \times \vec{p} \longrightarrow -\frac{L}{m_e}$$

$$\Delta E = \vec{\mu}_e\vec{B}$$

$$\Delta E_{new} = \frac{\cancel{e}}{m_e^2c^2\cancel{e}}\frac{dV}{dr}\frac{1}{r}\vec{S}\vec{L}$$

$$V = -\frac{Ze^2}{r}$$