Quanten II VO 8.04.08

WH von vorigem Mal:

$$|u_\pm\rangle = |u_0\rangle + \sum \left(\frac{1}{E-H_0 \pm i\varepsilon} V\right)^n |u_0\rangle$$

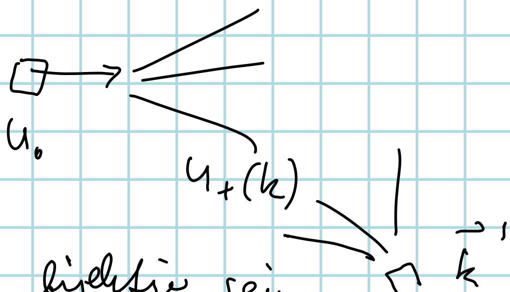
$$= \Omega_\pm |u_0\rangle \qquad \boxed{\Omega_\pm = 1 + \frac{1}{E-H \pm i\varepsilon} V}$$

zu vollst. H

$$f = -4\pi^2 \frac{m}{\hbar^2} \langle \vec{k}' | \underbrace{V \Omega_+}_{T} | k \rangle$$

T – Transfer Matrix

Streu Matrix: $\boxed{S = \Omega_-^+ \Omega_+}$



Ω_+: Isometrie

unitär: Basis $\mapsto$ Basis // müsste bijektiv sein

$$\Omega_\pm |u_i^0\rangle = |u_i^\pm\rangle \qquad \langle u_i^0 | u_j^0\rangle = \delta_{ij} = \langle u_i^+ | u_j^+\rangle$$

$$\{e_1, e_2, e_3 \ldots\} \to \{e_2, e_3 \ldots\} \qquad e_i \to e_{i+1}$$

$$\Omega_+ : \quad \underset{|k\rangle}{|u_i^0\rangle} \to \underbrace{|u_i^+\rangle}_{E \geq 0}$$

// verlieren gebundene Zustände!

$$\Omega_\pm = \Omega_\pm \sum_i |u_i^0\rangle\langle u_i^0| = \sum_i |u_i^\pm\rangle\langle u_i^0|$$

NR.
$$\Omega_\pm^+ \Omega_\pm = \sum_{ij} |u_j^0\rangle\langle u_i^\pm | u_j^\pm\rangle\langle u_j^0|$$

$$= \sum_i |u_i^0\rangle\langle u_j^0| = \mathbb{1}$$

$$\Omega_\pm \Omega_\pm^+ = \sum_i |u_i^\pm\rangle \underbrace{\langle u_j^0 | \sum_j | u_j^0\rangle}_{\delta_{ij}} \langle u_j^\pm|$$

$$= \sum_i |u_i^\pm\rangle\langle u_i^\pm| = \mathbb{1} - \mathring{P}$$ rojektor / gebundene Zustände

$$S^+S = \Omega_+^+ \Omega_- \Omega_-^+ \Omega_+ = \Omega_+^+ (1 - P_{geb}) \Omega_+ =$$

$$\Omega_+^+ \Omega_+ = \mathbb{1}$$

trägt nicht bei zu Müllerge.

$$S S^+ = \Omega_-^+ \Omega_+ \Omega_+^+ \Omega_- = \Omega_-^+ (1 - P_{geb}) \Omega_- = \mathbb{1}$$

$\Rightarrow$ S invertierbar haben unitären Op

können geb. Zust. nie erreichen

statisch : $u = \emptyset$

stationär : bewegt sich was, aber immer gleich

keine Zeit mehr oder Kausalität

$S \leftrightarrow T$: $\quad S_{ij} = \langle u_i^- | u_j^+\rangle$

$*_1$: δ_{ij} $\quad = \underset{*_1}{\langle u_i^+ | u_j^+\rangle} + (\langle u_i^- | - \langle u_i^+ |) | u_j^+\rangle$

$$= \delta_{ij} + \langle u_i^\circ | V \Big(\underbrace{\frac{1}{E_i - H + i\varepsilon}}_{\text{Pol unten}} - \underbrace{\frac{1}{E_i - H - i\varepsilon}}_{\text{Pol oben umgehen}} \Big) | u_j^+ \rangle \quad E_i \to E_j$$

Diff = Diff d. Residuen

Berechn. d Klammer:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{z - i\varepsilon} - \frac{1}{z + i\varepsilon} \right) = 2\pi i \, \delta(z)$$

$$S_{ij} = \delta_{ij} - 2\pi i \, \delta(E_i - E_j) \langle u_i^\circ | \underbrace{V \Omega_+}_{T} | u_j^\circ \rangle \quad // \; T_{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_{ij} = \delta_{ij} - 2\pi i \, \delta(E_i - E_j) \, T_{ij}} \qquad // \; E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\delta(E_i - E_j) = \frac{m}{\hbar^2 k} \, \delta(k_i - k_j)$$

$$\langle k' | S | k \rangle = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') + \frac{i}{2\pi k} \, \delta(k - k') \, f(\underbrace{\vec{k}', \vec{k}}_{\Theta})$$

$$u \xrightarrow[|x| \to \infty]{} \begin{cases} e^{ikx} + R \, e^{-ikx} & x \ll \varnothing \\ T \, e^{ikx} & x \gg \varnothing \end{cases}$$

$$r \to \infty \quad e^{ikx} + \Theta(x) \, f_+ \, e^{ikx} + \Theta(-x) \, f_- \, e^{-ikx}$$

$R \approx 1 + f_- \qquad T \approx f_+ \qquad ??$

R: Reflexionskoeff
T: Transm.

Kap 9: Symmetrien + Transformationen

Symm := Trafo bei der sich nix ändert

- diskrete
- kontinuierlich → infinitesimale Symmetrien

Emmy Noether: zu jeder Symmetrie gibt es eine Erhaltungsgröße

E erhalten ↔ t invariant (nicht explizit t abh)

p erhalten ↔ x invariant

$H(\cancel{t}, x) \leftrightarrow \psi = e^{-i\omega t} u$ // wir rechnen nur mehr mit u (stationär)

Newton Mechanik → Euklid.-Raum

$i\hbar \partial_t = H \qquad P \sim \partial_x$

Gallilei Trafo: $g_v(t, \vec{x}) = (t, \vec{x} + vt)$

$\rightarrow (t + \tau, \vec{x} + \vec{\xi})$

Drehungen / orthogon. Trafos:

$t \rightarrow t$

$\vec{x} \rightarrow O\vec{x}$

||

$O O^T = \mathbb{1} \Rightarrow \det O = \pm 1$

Drehung: $\det O = +1 \qquad SO(3) \qquad S$: speziell

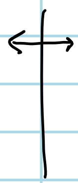
Spiegelungen : $\det O = -1$

$SO(3) \to g$ ~ Drehung um Achse $\vec{\alpha}$ um einen Winkel $|\vec{\alpha}|$

kann man aus infinitis. Drehungen aufbauen (Methoden..)

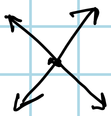
Man kann die Frage nach Drehinvarianz durch inf. Drehungen beantworten. (inf D $\to$ ganze Dr.)

Punktspiegelung :



$$x_1 \to -x_1$$
$$x_2 \to x_2$$
$$x_3 \to x_3$$

Parität :



$\Downarrow$

P

$$\vec{x} \to -\vec{x}$$

Man kann Trafos aktiv od. passiv machen

aktiv : $\vec{x} \longrightarrow \vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{\xi}$

passiv : Koordinatentrafo

Formeln schaun gleich aus bis aufs Vorzeichen!!

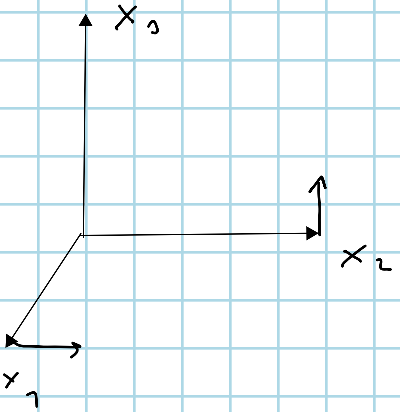
$\to$ aufpassen!!

Ansch. zu infin. Drehungen

$$\overset{\text{Drehung}}{R_{\vec{\alpha}}} = \left(R_{\frac{1}{n}\vec{\alpha}}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(\mathbb{1} + \frac{1}{n} \underbrace{\delta R_{\vec{\alpha}}}_{\text{infinites.}}\right)^n = \exp(\delta R_{\alpha})$$

Formel wie : $e^{x} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} x\right)^{n}$.

$\delta R \hat{=} f'$ $\qquad$ $df = f' \, dx$



$$\vec{\alpha} = \vec{e}_2 \, |\alpha|$$

$$\delta R_{e_2} \begin{cases} \delta x_2 = x_1 \\ \delta x_1 = -x_2 \\ \delta x_3 = \emptyset \end{cases}$$

Rot um z-Achse

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta R(\vec{\alpha}) \quad x_i = \varepsilon_{ijk} \, \alpha_j \, x_k \\ &(\delta R(\vec{\alpha}))_{ik} = \varepsilon_{ijk} \, \alpha_j \end{aligned}}$$

→ abh. v.d Reihenfolge!!

$$T(\varepsilon \alpha) = \mathbb{1} + \varepsilon \, \delta T(\alpha) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$T_\alpha(f(x) \, g(x)) = T_\alpha(f(x)) \cdot T_\alpha(g(x))$$

2 Phasenraumfkt. f & g

$$T_{\varepsilon\alpha}(f \cdot g) = (f + \varepsilon \, \delta T f + \mathcal{O}(\varepsilon^2))(g + \varepsilon \, \delta T g + \mathcal{O}(\varepsilon^2))$$

$$= fg + \varepsilon(\underbrace{\delta T(f) \cdot g + f \, \delta T(g)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\delta T(f \cdot g) = f \, \delta T(g) + \delta T(f) \cdot g$$

// Leibnitz Regel f Diff.

erfüllt Prod Leibnitzregel → hintereinanderausf.

erfüllt Kettenregel

$$T_1 T_2 = (\mathbb{1} + \varepsilon\, \delta T_1)(\mathbb{1} + \varepsilon\, \delta T_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) =$$
$$\mathbb{1} + (\delta T_1 + \delta T_2)\,\varepsilon + \dots$$

$$A \cdot A^T = \mathbb{1} \qquad (\mathbb{1} + \delta A\, \varepsilon)(\mathbb{1} + \delta A^T \varepsilon + \dots) =$$
$$\mathbb{1} + \underbrace{(\delta A + \delta A^T)}_{\text{muss bei inf. verschwinden}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$\downarrow$

System von quadr. Gl.

Inf: System v. linearen Gl. $\quad \delta A = -\delta A^T$

$$U U^T = \mathbb{1} \quad \longleftrightarrow \quad (1 + \varepsilon \delta U)(\mathbb{1} + \varepsilon \delta U^+) = \mathbb{1} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$$\delta U = -\delta U^+ \qquad \boxed{\delta U = i H} \qquad U = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$$

Übergang v. normal auf inf. $\longrightarrow$ linearisieren! einfach aufaddieren!

Baker – Campbell – Hausdorff Formel:

$$e^A e^B = e^{A + B + \frac{1}{2}[A,B] + [[\dots]]}$$

Abhängigkeit der Reihenfolge steckt in Kommutatoren!

Quantum Mechanics: neue WF & neuer Ort (Koordinaten syst.)

aktiv $\qquad$ passiv

wenn man beides macht, dann ändert sich nichts!

$$\rightarrow \quad \psi(x) = \psi'(x') \qquad x' = R x$$
$$\psi'(y), \quad x' = y \qquad x = R^{-1} y$$

$$\psi'(y) = \psi(R^{-1}x) \qquad \psi(x) \longmapsto \underline{\psi'(x) = \psi(R^{-1}x)}$$

R ... im Hilbertraum $\qquad \psi \to \psi' = R\psi$

infinit. Drehung $\vec{J}$

$$(R\psi)x = \langle x | R | \psi \rangle$$
$$= \langle R^{+} x | \psi \rangle = \langle R^{-1} x | \psi \rangle = \psi(R^{-1} x)$$

9.2 Noether Theorem & Quantisierung

Wie transformiert sich Drehung von Spinoren?

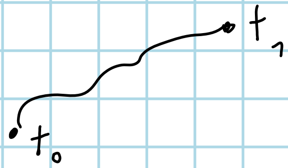
$$\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \qquad \phi(x) \to \phi(R\vec{x})$$

$$\vec{B}(x) \longrightarrow R(\vec{B}(R\vec{x}))$$

Klass. Mechanik

$L(q^i, \dot{q}^i, t) \qquad \{q^i\}$ ... Konfigurationsraum

$$\phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} dt\, L$$



$$\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = \emptyset$$