Quanten II VO 09.04.08

Transformationen : $\begin{cases} \text{aktive} \\ \text{passive} \end{cases}$ $\begin{cases} \text{diskret} \\ \text{kontinuierlich} \end{cases}$

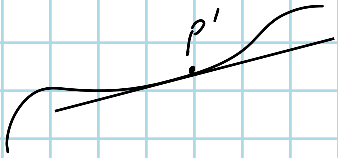
$\downarrow$ infinitesimal $*_1$

$*_1$: $f(\varepsilon x) = f(\emptyset) + \varepsilon f'$

$$T(\varepsilon \alpha) = \mathbb{1} + \varepsilon \underline{\underline{\delta T}} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

linearis. nicht Probleme

δT ... Leibniz, Kettenregel



$U \cdot U^T = \mathbb{1}$ $\qquad U = \mathbb{1} + \varepsilon\, \delta U$

$$U = \mathbb{1} + \varepsilon i H + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = e^{i \varepsilon H}$$

$\downarrow$

$\delta U + (\delta U)^+ = \emptyset$, $(\delta U)^+ = -\delta U$

$$e^A e^B = e^{A + B + [A,B] + \dots}$$

Klassische Mechanik:

2 Möglichkeiten: 1) Wirkung / L-Funktion od 2) Hamiltonfkt.

1) $\phi = \int_\gamma dt\, L(q^i, \dot{q}^i, t)$

$\delta \phi = \emptyset \quad / \quad \delta q^i(t_0) = \delta q^i(t_1)$

Euler Lagrange $\dfrac{\delta L}{\delta q^i} := \dfrac{\partial L}{\partial q^i} - \dfrac{d}{dt} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \emptyset$ (BWGL)

2) $H(p_i, q^i, t) = p_i \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i, t)$

$$\boxed{p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}}$$

$$\boxed{\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}}$$

BWGL

$\{q^i, p_i\}$ // Phasenraum

$$f(q,p), \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

/ Legendre Trafo

Poisson Klammer:

$$\{f, g\}_{PB} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i}$$

$$\boxed{i\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi}$$

Was ist eine infinitesim. Symmetrie? :

Lagrange: $\hat{\delta} q^i = f(q^i, \dot{q}^i)$

// Symm: L transform. in totale Zeitableitung

$$\hat{\delta} L = \dot{K}(q^i, \dot{q}^i)$$
$$\parallel$$
$$\frac{\partial L}{\partial q^i}\hat{\delta} q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\hat{\delta}\dot{q}^i$$

Trafo, die die BWGL invariant lässt

$$\phi = \int L \, dt$$

$$\hat{\delta}(\phi) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{K} \, dt = K(t_1) - K(t_0) = \emptyset$$

// Variation ist an Anfangs & Endzeit $\emptyset$

$\delta\varphi = \emptyset$ / $t = t_0, t_1$

Änderung d. Wirkung besteht nur aus Oberflächentermen

$\wedge$: ganz bestimmte Transformation; ohne $\wedge$, eine beliebige

unter RB d. Symmetrietrafo

q^i, p_i $\qquad H$

$\{q^i, p_i\}_{PB} = \delta^i_j$

Symmetrie: kanonische Trafo

$\hat{\delta} H = \emptyset$

kanonische Trafo: $q^i \to \tilde{q}^i(q^j, p_k)$

$p_i \to \tilde{p}_i(q^j, p_k)$

$\{\tilde{q}^i, \tilde{p}_j\}_{PB} = \delta^i_j$

---

infinit: $\tilde{q}^i = q^i + \hat{\delta} q^i + \mathcal{O}(\sim)$

Nöther Theorem (Lagrange): sei $\hat{\delta} q^i$ eine Symmetrie,

$\hat{\delta} L = \dot{K}(q^i, \dot{q}^i)$

$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = \hat{\delta} q^i p_i - K}$ // Erhaltungsgröße

Ges. Ladung

Umgekehrt: Sei Q eine Erhaltungsgr. = Konstante der Bewegung

$\Rightarrow \quad \dot{Q} = \hat{\delta} q^i \frac{\delta L}{\delta q^i}$ $\qquad$ Symmetrietrafo

Änderung d. Ladung als lin. Komb. d. BWGL darstellbar!

Bemerkung: Unterscheidung zw. Gleichungen & Identitäten

F. Bewegungen die BWGL nicht erfüllen ist Q nicht erhalten

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \underbrace{\delta \dot{q}^i}_{\frac{d}{dt} \delta q^i}$$

// $\delta \dot{q}^i = \partial_t \delta q^i$

$$= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q^i}\,\delta q^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\,\delta q^i\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^i}\,\delta q^i}$$

$$\hat\delta L = \frac{\delta L}{\delta q^i}\,\hat\delta q^i + \frac{d}{dt}\left(p_i\,\hat\delta q^i\right) = \frac{d}{dt}K$$

$$// \quad \frac{d}{dt}\big(\underbrace{K - p_i\,\hat\delta q^i}_{-Q \quad // \text{Def}}\big) = \frac{\delta L}{\delta q^i}\,\hat\delta q^i$$

L.K. d BWGL ergibt Erhaltungsgr.

und umgek.: Erhaltungsgr. lässt sich als L.K d BWGL darst.