Quanten II VO 03.06.08

WKB fertig $\qquad \psi = A\, e^{\frac{i}{\hbar} S}$

1 dim. $\quad (\nabla \tilde{S})^2 = \ldots \qquad$ // Wurzel ziehen

$\uparrow$

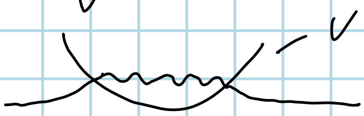
$t \to E$

$$u(x) = \frac{C_+}{\sqrt{p(x)}}\, e^{\frac{i}{\hbar}\int^x dx'\, p(x')} + \frac{C_-}{\sqrt{p(x)}} \left(- \text{"} - \right)^*$$

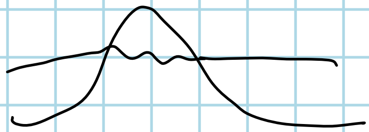
Tunneleffekt mit WKB dsp $\to$ Tunnelamplitude

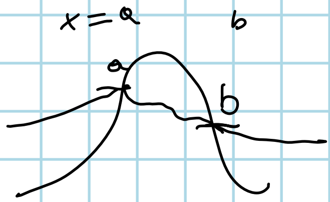
Potential ist eig verkehrt

WKB:



Tunneln:





$\to$ analytische Fortsetzung: V_z von Term in d. Mitte umdrehen

Mitte WKB: $\quad p(x) = \sqrt{2m\underbrace{(E-V)}_{\cdot(-1)}}$

Ein paar Näherungen: Nur abfallenden Zweig d. e Fkt v WKB nehmen (kein Rücktunneln)

$p \to ip$

$$\psi_{\text{tunnel}} \sim \frac{u(b)}{u(a)} \sim e^{-\frac{1}{\hbar}\int_a^b \sqrt{2m\,(V(x)-E)}}$$

$$T = O\, \underbrace{e^{-2\int_a^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar}(V(x)-E)}}}_{\text{dominant / einfach}} \qquad \text{// Tunnelwahrs.}$$

Vorfaktor mühsam zu best.

Semiklassische Streuung:

WKB eig nur 1d. ; hier macht man aber Separat. Ansatz

$u(x) = R(r)\, Y_{lm}$ || $\tilde{R} = R \cdot r$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + V_{eff}(r)\right)\tilde{R}(r) = E\tilde{R} \qquad \text{SGL}$$

$$V_{eff} = V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

asympt. Lsg:

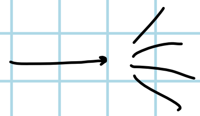
$$R_l^{\infty}(k,r) = A_l(k)\,\frac{1}{kr}\,\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k)\right)$$

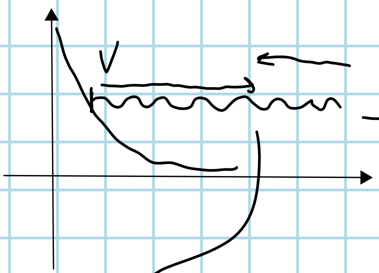
$\hookrightarrow f_l = \dots(\delta_l)$

$$\tilde{R}_{WKB} \sim \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_{r_0}^{r} d\rho\, \sqrt{2m(E-V_{eff})} - \pi\frac{\mu}{4}\right)$$ siehe Skript

Vorfaktor egal weil es nur um Versch. d. einl. ausl. Ströme geht

r_0 .... klassischer Umkehrpunkt | $r \to \infty$





— Fall: Welle fällt v. rechts ein und wird am Pot. reflektiert

$\Rightarrow$ Summe aus einl. & ausl. Welle

$$\underbrace{e^{-ikr} + e^{ikr}}_{\cos}$$

Phasenversch.: in R_{WKB} $r \to r_0$ $\Rightarrow$ Phase

$r \to \infty$: Asymptotische Lsg

$$\tilde{R} = \sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_{r_0}^{r} d\rho\; p(\rho) + \frac{\pi}{2} - \pi\frac{\mu}{4}\right)$$

R_ℓ^∞ & $\tilde{R}$ vergleichen $\Rightarrow$

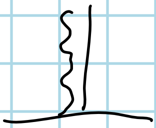
$$\Rightarrow \boxed{\delta_\ell = \lim_{r\to\infty}\left(\ell\frac{\pi}{2}\underbrace{-kr + \frac{1}{\hbar}\int_{r_0}^{r} d\rho\; p(\rho)} + \frac{\pi}{2} - \pi\frac{\mu}{4}\right)}$$

semikl. Approx. f. Streuphase

Gute Näherung: $\ell \to \infty$

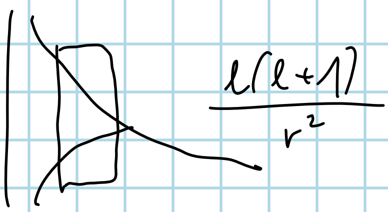
kleine Werte: Maslov Index berücksichtigen

$\ell = 0$



Potential anpassen $\quad V(r) = V(|x|)$ // klassisches Pot

$\ell > 0$: auch Zentrifugalbarriere

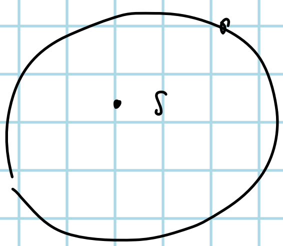


(kleine ℓ): Langer 1937

Variablentrafo: Bereich d. klass. Umkehrpkt. exp. vergrößern

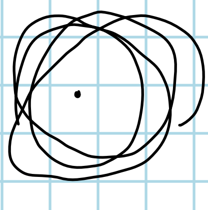
$$\ell(\ell+1) \longmapsto \left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2$$

QM: dim > 1, Problem: System muss nicht integrabel sein



schön integrabel

jedoch reale Bewegung: keine geschlossenen Orbits!



Einstein 1917: $\rightarrow$

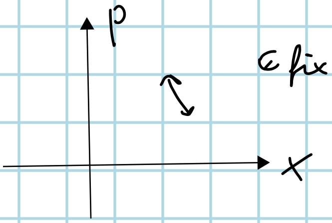
geschlossene Bahnen mit Maß 0: Anfangsbed. tunen

AB nur bisserl falsch → keine geschl. Bahn

integrable Systeme: → EKB (Einstein)

es gibt genug Erhaltungsgrößen in einem System um es zu beschreiben

1 dim autonomes System (E erhalten) $p = \pm \frac{\sqrt{E - V(x)}}{2m}$



<u>Integrabel:</u> $\begin{cases} 2d \text{ dim Phasenraum} \\ d \text{ Konstanten d Bewegung} \end{cases}$

$I_1 \ldots I_d$ Variablentrafo

$\{I_1, I_d\}_{PB} = 0$

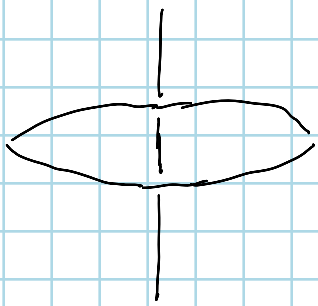
→ Wirkungs-Winkel Variablen (conj)

$\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_i \\ \theta_i \end{pmatrix}$

Pfadintegral

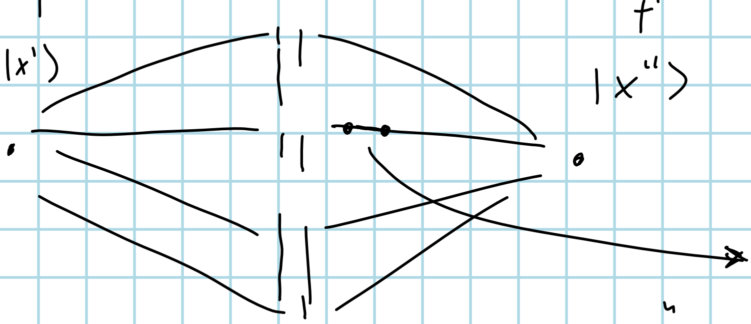
Dirac 1933; Feynman 49

Doppelspalt:



// nur 2 Trajektorien

weniger Einschränken?



$\boxed{e^{\frac{i}{\hbar} S(\quad)}}$

Übergangs-Amplitude

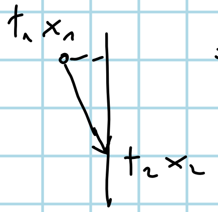
$\int_x \langle x'' | x \rangle \langle x | x' \rangle$

$K(x'', x', t'' - t')$

$$K(\dots) = \langle x'', t'' | x', t' \rangle = \langle x'' | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t''-t')} | x' \rangle$$

$X|x\rangle = x|x\rangle$; $\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \int dx \, \langle x'', t'' | x, t \rangle \langle x, t | x' t' \rangle$

für $t_2 = t_1 + \varepsilon$ $\quad \langle x_2, t_2 | x_1 t_1 \rangle = \langle x_2 | e^{-i/\hbar H(t_2 - t_1)} | x_1 \rangle$



$\Rightarrow$ Zeit & Ortstranslation

Zeitentw. $\quad$ Impulsop.

$$|x_2\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} P(x_2 - x_1)} |x_1\rangle$$

$$\langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle \underset{\varepsilon \to 0}{=} \langle x_1 | e^{\frac{i}{\hbar} P \underbrace{(x_2 - x_1)}_{*_1}} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_2 - t_1)} | x_1 \rangle + O(\varepsilon^2)$$

Darum ist Fehler d. Operatoren-reihenfolge egal ist.

$\int |p\rangle\langle p|$

Man würde gerne Impulsop. d. klass. Imp. ersetzen $\rightarrow$ Impulsop. d. EW ersetzen

$*_1$: $\delta x = \dot{x} \, \delta t$

$$\langle x'' t'' | \quad | \; | \; \overset{x_2}{|} \; \overset{x_1}{|} \; | \quad | \; | \quad | x' t' \rangle$$

$\int_p |p\rangle\langle p| \qquad \int dx \, |\rangle\langle|$

$$// \; \langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle = \int dp_1 \, \langle x_1 | e^{\frac{i}{\hbar} p_1 (x_2 - x_1)} |p_1\rangle\langle p_1| e^{-\frac{i}{\hbar} H \delta t} |x_1\rangle$$

$$\langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle = \int dp_1 \, \langle x_1 | p_1 \rangle \, e^{-\frac{i}{\hbar} \delta t (p_1 \dot{x}_1 - H(x_1, p_1))} \langle p_1 | x_1 \rangle + O(\delta t^2)$$

$$H = \frac{p^2}{2m} - V(x) \qquad e^{\delta t (p^2 + V(x))} \neq e^{\delta t p^2} e^{V(x) \delta t}$$

kann man vern. weg. lin. Hamilton & $\mathcal{O}(\delta t^2)$

$H = px\,px$ wäre noch schlimmer

$$\boxed{\langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle = \underbrace{\int dp_1\, e^{-\frac{i}{\hbar}\delta t\,(p_1 \dot{x}_1 - \underbrace{H(x_1,p_1)}_{p_1^2})}}_{\text{kein Operator mehr drin!}} + \mathcal{O}(\delta t^2)}$$

<u>Speziell</u>: $\quad H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$

$$\langle x_2 t_2 | x_1 t_1 \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar\, \delta t}}\; e^{i\,\delta t\, L(x,\dot{x})}$$

L: Lagrange Fkt.

$\int dt\, L \to S$

$$-\underbrace{\frac{1}{2m}(p_1 - \dot{x}_1)^2 + \frac{\dot{x}_1^2\, m}{2}}_{p_1 \dot{x}_1 - \frac{p_1^2}{2m} - V(x)}$$

$$= \underline{\sqrt{\quad}\; e^{i\,\delta t\, L(x,\dot{x})}}$$

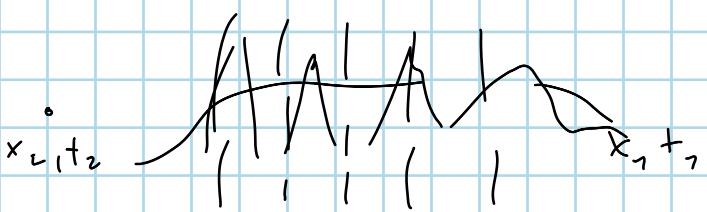
x'' | | | | | | | x'

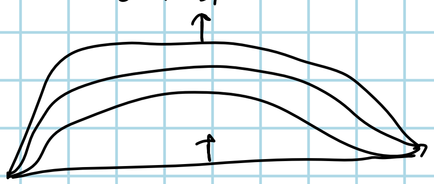
$x_4 \cdots x_2\, x_1$

$$\langle x'' t'' | x' t' \rangle = \int dx_1 \cdots \int dx_4\, \langle x'' t'' | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle \cdots$$

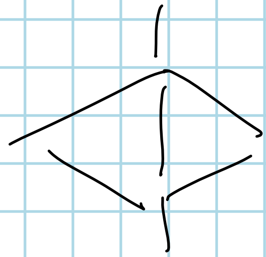
$$\underset{\text{ain } \delta t \to 0}{=} \int \mathcal{D}x\; e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} L(x,\dot{x})}$$

$$\mathcal{D}x = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2\pi i \hbar\, \delta t}\right)^{n/2} dx_1 \cdots dx_{n-1}$$





Wenn man über alle Wege geht var. die Phase wild &
Wegunterschied mittelt sich weg!



Anwendung bei Doppelspalt

Übergl. von QM & klassisch

/

sämtl. Trajektorien