Vorlesung

siehe Kopien f. Hamilton Formalismus v. 15.04.

$$\hat{\delta} L = \dot{K} \,, \qquad Q = \hat{\delta} q^i p_i - K \qquad L = \dot{q} p - H$$

$$\hat{\delta} f(q,p) = \{ Q, f \}_{PB} \qquad \hat{\delta} H = \{ Q, H \}_{PB} = -\dot{Q}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \{ p_i, x^j \}_{PB} &= \delta_i{}^j \\ [P_i, X^j] &= \frac{\hbar}{i} \delta_i{}^j \end{aligned}}$$

$$\{ \, , \, \}_{PB} \longrightarrow \frac{i}{\hbar} [\, , \,]$$

klass Mech $\longrightarrow$ QM

$$\hat{\delta} \Theta = \frac{i}{\hbar} [Q, \Theta] \qquad \dot{\Theta} = \frac{i}{\hbar} [H, \Theta]$$

Heisenbergsche BWGL f Op.

$$\longrightarrow |\dot{\psi}\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi\rangle$$

$$i\hbar \dot{\psi} = H \psi$$

infinit. — endlich

$$|\psi\rangle \longrightarrow \delta T |\psi\rangle \quad \ldots \quad |\psi\rangle \longrightarrow \underbrace{e^{\delta T}}_{\text{unitär}} |\psi\rangle$$

$$\delta T = -\frac{i}{\hbar} H \qquad e^{-\frac{i}{\hbar} H \cdot t} = U(t)$$

Vorsicht bei aktiv / passiv — Indizienbeweis f. Vorzeichen

$$|\psi\rangle \longmapsto T |\psi\rangle$$

$$\Theta \longmapsto T \Theta T^{-1}$$

// Passiv, zB eine Koordinate
aktiv wäre zB eine Drehung

$$\langle \psi | \Theta | \psi \rangle \longmapsto \langle \psi | \cancel{T^\dagger} T \, \Theta \, \cancel{T^{-1}} T | \psi \rangle$$

aktiv & passiv → bleibt gleich!

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \qquad e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{J}} = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{L}} \cdot \boxed{e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{S}}}$$

relevanter Anteil
Spinanteil

Symmetrietrafos: $[\vec{J}, H] = \emptyset$ // Bei drehinvar. Potential

Ist Pot. nicht invar $\rightarrow$ $[\vec{J}, H] \neq \emptyset$

Anwendung f e^- – Drehung: „Spin"

$$S_\pm |s, \mu\rangle = \hbar \sqrt{(s \mp \mu)(s \pm \mu + 1)} \; |s, \mu \pm 1\rangle$$

$$S_z |s, \mu\rangle = \hbar \mu |s, \mu\rangle$$

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2}$$

$$S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

S_z ...

$$\psi = \psi_+(x) \underbrace{|\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle}_{|\uparrow\rangle = \binom{1}{0}} + \psi_-(x) \underbrace{|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle}_{|\downarrow\rangle = \binom{0}{1}}$$

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \qquad \mathrm{tr}\, \sigma_i = \emptyset}$$

$$\boxed{-\frac{i}{\hbar} \vec{\alpha} \vec{S} \quad \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}}$$

Drehgenerator im Spin Raum

$$R_{\vec{\alpha}} = e^{-\frac{i}{2} \vec{\alpha} \vec{\sigma}} = \mathbb{1} - \frac{i}{2} \vec{\alpha} \vec{\sigma} + \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{2}\right)^2 \underbrace{(\vec{\alpha} \vec{\sigma})^2}_{|\alpha|^2 \mathbb{1}} + \frac{1}{3!} \left(-\frac{i}{2}\right)^3 \underbrace{(\vec{\alpha} \vec{\sigma})^3}_{|\alpha|^2 (\vec{\alpha} \vec{\sigma})} + \dots$$

// $\vec{e}_\alpha = \frac{\vec{\alpha}}{|\alpha|}$ – Richtg. d. Drehachse; $|\alpha|$ – Länge d. Drehwinkels

// gerade & ungerade Terme zusammen

$$(\vec{\alpha} \vec{\sigma})^2 = \alpha_i \sigma_i \alpha_j \sigma_j = \alpha_i \alpha_j \delta_{ij} \cdot \mathbb{1} = \alpha^2 \cdot \mathbb{1}$$

$$= \alpha_i \alpha_j \underbrace{\sigma_i \sigma_j}_{\frac{1}{2}\{\sigma_i, \sigma_j\}}$$

$$= \mathbb{1} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - i\, \vec{e}_\alpha \vec{\sigma} \sin\frac{\alpha}{2}$$

Wenn man einen Spinor 1x herumdreht, so wechselt er sein VZ.
2x drehen $\rightarrow$ gleiches VZ

$$R_{|\alpha|=2\pi} = -\mathbb{1}$$

$\left.\begin{matrix} e^{i\varphi}|\psi\rangle \\ |\psi\rangle \end{matrix}\right\}$ identische Zustände, erst bei Interferenzexp.
Rauch 1975
Sichtbar erst bei Überlagerung

Spin 1: $\left|1, \begin{matrix}1\\0\\-1\end{matrix}\right\rangle \rightarrow \vec{x}|\psi\rangle$

$S_\pm$

$$S_x^{(1)} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;;\quad S_y^{(1)} = \frac{\hbar}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_x^{(1)} = \frac{S_+ + S_-}{2} \qquad S_y^{(1)} = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

$$S_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$|1, \mu\rangle \qquad S_+|1,0\rangle = \hbar\sqrt{\underbrace{----}_{\sqrt{2}}}\;|1,1\rangle$

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\alpha}\vec{S}}$$

(α, β, γ) 3 Eulerwinkel $\quad \langle j, m'|\, R\, |j, m\rangle$

$$R = e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_z}\, e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta}\, e^{-\frac{i}{\hbar}J_z\gamma}$$

Rechnen in z-Basis:
J_z diagonal

$$= e^{-im'\alpha}\underbrace{\langle j, m'|\, e^{-\frac{i}{\hbar}J_y\beta}\, |j, m\rangle}_{d^{(j)}_{m',m} = \ldots} e^{-im\gamma}$$

P... Jacobi Polyn. $\rightarrow F(\ldots)$

irreduzible Tensoroperatoren

V

E_i $\longleftrightarrow$ $T_q^{(k)}$ Rang, Gesamtdrehimpuls

T_{ij} Kollektion v. Op.

T_{ijk}

magnet Q. Z.

$|k, \mu\rangle$

k Rang

q