

$$R_L = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{J}} \quad \parallel \quad \cos \frac{\alpha}{2} \mathbb{1} - i \vec{e}_z \cdot \vec{\sigma} \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{J}} = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{L} \cdot \vec{L}} R_{\vec{L}}$$

$s=1$; $S_x^{(1)} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

S_+

S_-

$\hat{=} \text{Spin}$
 Vektoren $\leftrightarrow s=1$. $|\vec{v}\rangle$

$|e_x\rangle \leftrightarrow |1,1\rangle$
 $|e_y\rangle \leftrightarrow |1,0\rangle \leftrightarrow S_z |1,0\rangle = 0$
 $|e_z\rangle \leftrightarrow |1,-1\rangle$

$|1,0\rangle = |e_z\rangle$

$\sqrt{2} |1,\pm 1\rangle = S_{\pm} |1,0\rangle$ $S_{\pm} |1,0\rangle = \hbar \sqrt{2} |1,\pm 1\rangle$

$|1,\pm 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} S_{\pm} |e_z\rangle$

Drehung um y - Achse

$$-\frac{i}{\hbar} S_x \begin{cases} e_x \\ e_y \\ e_z \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ e_z \\ -e_y \end{cases} \quad \parallel \quad -\frac{i}{\hbar} S_y \begin{cases} e_x \\ e_y \\ e_z \end{cases} = \begin{cases} -e_z \\ 0 \\ -e_x \end{cases}$$

$$T = \mathbb{1} + \delta T + \mathcal{O}(\delta^2)$$

$|1,\pm 1\rangle = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x \pm i \vec{e}_y)$ $S_{\pm} = S_x \pm i S_y$

$|\pm 1\rangle \otimes |\pm \frac{1}{2}\rangle \rightarrow \begin{cases} \text{Singlet} \\ \text{Triplet} \end{cases} \quad \parallel \quad |4\rangle, |4\rangle$

2 Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen

$\langle \varphi | \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{matrix} \right\} | \psi \rangle$ $\langle \varphi | \mathbb{1} | \psi \rangle$ Singlet

$\pm \frac{1}{2}$ $\langle \varphi | \vec{\sigma} | \psi \rangle$ Triplet

Beweis: $S R_{\alpha} (\langle \varphi | \sigma_i | \psi \rangle) = \langle \varphi | \sigma_i (-\frac{i}{2} \sigma_j \times_j) | \psi \rangle$

$+ (\langle \varphi | \frac{i}{2} \sigma_j \times_j) \sigma_i | \psi \rangle$

$= \epsilon_{jk} (-\frac{i}{2}) \langle \varphi | \underbrace{\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i}_{\sum_l \epsilon_{ijk} \sigma_k} | \psi \rangle$

$\sum_l \epsilon_{ijk} \sigma_k$

$$\delta R_x (\langle \varphi | \sigma_i | \varphi \rangle) = \langle \varphi | \epsilon_{ijk} \sigma_k | \varphi \rangle$$

$\delta R_x (\langle \varphi | \varphi \rangle) = 0$ Pauli M.-Transformiert wie ein Vektor - siehe oben

Zusammenhang zw. Drehung bei Spins & Vektoren gesucht

$$SO(3, \mathbb{R}) \quad \dots \quad \mathbb{R}^3$$

$\vec{v} \mapsto \Theta \vec{v}$

$|\varphi\rangle \mapsto A|\varphi\rangle, A = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\sigma} \cdot \vec{k}} \in SU(2)$

$\Theta = R_{ik}$ // Matrix

$\text{tr} \vec{\sigma} = 0 \Rightarrow \det A = 1$

speziell / unitär

$R_z \langle \sigma_x \rangle \rightarrow \langle \sigma_y \rangle$
 $\dots \langle \sigma_y \rangle \rightarrow \langle \sigma_x \rangle$
 $\dots \langle \sigma_z \rangle \rightarrow 0$

ändert sich nicht bei Drehung!

$$\langle \varphi | \sigma_i | \varphi \rangle \rightarrow \langle \varphi | A^\dagger \sigma_i A | \varphi \rangle = R_{ik} \langle \varphi | \sigma_k | \varphi \rangle$$

$A^\dagger \sigma_i A = R_{ik} \sigma_k$ $SU(2) \leftrightarrow SO(3)$

$AA^\dagger = \mathbb{1}$
 $\det A = 1$

Beh: $SU(2) \leftrightarrow S^3$

S^3 / 3 dim Kugel

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $|a|^2 + |b|^2 = 1$
 $a c^* + b d^* = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

alle Vektoren f. d. pilt $\hookrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c^* & d^* \end{pmatrix} = 0$

$$\det A = 1 = \underbrace{(|a|^2 + |b|^2)}_1 \cdot p \Rightarrow p = 1$$

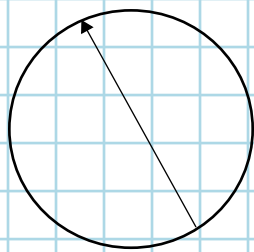
$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, |a|^2 + |b|^2 = 1$$

$$(\text{Re } a)^2 + (\text{Im } a)^2 + (\text{Re } b)^2 + (\text{Im } b)^2 = 1$$

$$\pm A \leftrightarrow R$$

$$SU(2) \rightarrow SO(3)$$

$SO(3)$



$S^3 = SU(2)$

$SU(2)$ ist etwas größer als $SO(3)$

QM Zustand $\leftrightarrow e^{i\varphi} |\psi\rangle$

Zustand wird bis auf Phase auf Hilbertraum abgebildet ...

Dreht man ein Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen 1π , so kehrt es um $\sqrt{2} \rightarrow$ klassisch nicht möglich!

A_5 sind gegenüberl. Pkte. auf 3-Sphäre

Tensoroperatoren & Wigner Eckart Theorem

$$\vec{u} \leftrightarrow \vec{S}_1, S_2 \rightarrow \begin{matrix} |1,1\rangle & u_x + i u_y \\ |1,0\rangle & u_z \\ |1,-1\rangle & u_x - i u_y \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \rightarrow \\ P|\psi\rangle \\ P_x P_y P_z |s\rangle \\ \vdots \\ |-s\rangle \end{matrix} \quad \begin{matrix} (3 \times 2s+1) \\ \vec{V}_j |m\rangle \\ \downarrow \in \mathcal{H} \\ \text{Zus. QZ} \end{matrix} \quad \text{---} \quad |j,m\rangle \quad \begin{matrix} // \text{äquivalent zum} \\ \text{Hinzufügen eines neuen} \\ \text{QZ!} \end{matrix}$$

Vektoren & Vektoren sind fast d. gleiche

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ - Hilbertraum

$$\vec{V}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

$$|\psi\rangle \rightarrow T|\psi\rangle \quad (\Theta|\psi\rangle) \rightarrow T(\Theta|\psi\rangle) = (T\Theta T^{-1})T|\psi\rangle$$

infinit. Trope:

$$T = 1 + \delta T \quad |\psi\rangle \rightarrow \delta T|\psi\rangle$$

$$(\Theta|\psi\rangle) \rightarrow \delta T(\Theta|\psi\rangle)$$

$$[\delta T, \Theta]|\psi\rangle = \Theta \delta T|\psi\rangle$$

T sei nun eine Drehung

hinschreiben f. Vektoren:

$$V_j | \psi \rangle = | j, \psi \rangle ;$$

$$[J_i, V_j] = i \epsilon_{ijk} V_k$$

weitere Indizes:

$$[J_i, W_{jk}] = i \epsilon_{ijk} W_{kl}$$

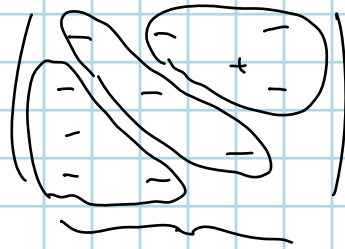
$$+ i \epsilon_{ikl} W_{jl}$$

irreduzible Tensorgr:

$$V_i \leftrightarrow S(1, m)$$

$$W_{jk} \rightarrow \begin{matrix} \nearrow s=2 \\ \rightarrow s=1 \\ \searrow s=0 \end{matrix}$$

Freiheitsgr.



$$S^{jk} W_{jk} \rightarrow \text{Spin } 0 \text{ Anteil}$$

$$e^{ijkl} W_{jk} = V^l \rightarrow \text{Spin } 1 \text{ Anteil}$$

3 Anteile

die 5 übrigen Zustände sind Spin 2 (2, m)

$$\vec{V} \rightarrow V_{1,m}$$

$$W_{jk} \rightarrow \begin{cases} W_0 \\ W_{1,m} \\ W_{2,m} \end{cases}$$

irreduziblen Tensorgr:

$$T_q^{(k)} = \begin{matrix} s, j \\ m, \mu \end{matrix}$$

Ordnung k: $[J_z, T_q^{(k)}] = \hbar q T_q^{(k)}$

$$[J_{\pm}, T_q^{(k)}] = \hbar \sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)} T_{q \pm 1}^{(k)}$$

$$= \hbar \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)} T_{q \pm 1}^{(k)}$$

(k+1) q's (2j+1) Zustände

$$T_q^{(k)} | j, m_j \rangle = \begin{matrix} | k & j \\ & \parallel & \parallel \\ & j_1 & j_2 \end{matrix}$$

(k+1)(2j+1) Zustände

→ $| k j q m \rangle \Leftrightarrow$ Clebsch Jordan Gesamtyim Eigenbasis

$\begin{matrix} | & | & | & | \\ j_1 & j_2 & m_1 & m_2 \end{matrix}$

Bestimmung d. Eigenbasis fkt. wie bei Vektoren

$$J_+ |1, 1\rangle = 0 \quad // \text{man sucht Zust. bei dem man nicht mehr nach oben kann}$$

$$\vdots$$

$$J_- |1, 1\rangle \dots$$

$$\langle l, j, m | T_q^{(k)} | l', j', m' \rangle = \langle j', m', k, q | j, m \rangle \cdot \langle l, j || T^{(k)} || l', j' \rangle$$

l sind aus QZ , die aber die Drehung nicht ändern!

$$*_1: |k, j', q, m'\rangle$$

reduziertes Matrixelement, hängt mit r . Magnet QZ ab!

Beweis: $T_q^{(k)} | l', j', m' \rangle \xleftrightarrow{\text{linearkombination}} | l, j'', m'' \rangle = T_q^{(k)} | l', j', m' \rangle \langle j', m', k, q | j'', m'' \rangle$

$(2k+1) (2j'+1)$ Zust

$$|k-j'| \leq j \leq k+j'$$

// unitären Basiswechsel

$\rightarrow CG$ invariantes

$$T_q^{(k)} | l', j', m' \rangle = \sum_{m''} | l, j'', m'' \rangle \langle j'', m'' | j', m', k, q \rangle$$

$$\langle l, j, m | T_q^{(k)} | l', j', m' \rangle$$

$$\underbrace{\sum_{j'', m''} | l, j'', m'' \rangle \langle j'', m'' | j', m', k, q \rangle}_{\delta_{jj''} \delta_{mm''}} = \langle l, j, m | l, j, m \rangle \cdot \langle j, m | j', m', k, q \rangle$$

unabh. von m' $\langle l, j || T^{(k)} || l', j' \rangle$ steht im \mathcal{G}
 $\langle j, m | j, m \rangle$ ist normiert, unabh. von m'

\mathcal{G} ist l, j, k

Anwendung des Theorems:

$$\langle l, j, m | Y_q^{(k)} | l', j', m' \rangle = \delta_{ll'} \langle j', m', k, q | j, m \rangle \langle j || Y_k || j' \rangle$$

$$Y_q^{(k)}(\psi) = Y_{kq} \psi(x)$$

$$\langle j, 0, k, 0 | j', 0 \rangle \cdot \sqrt{\frac{(2j+1)(2k+1)}{2j'+1}}$$