9.4 Symmetrie / rel. QM

Statt SGL Dirac-Gl.

$*_1 \quad i\hbar \dot{\psi} = H \psi \; ; \qquad H = c\alpha_i \left(P_i - \frac{e}{c} A_i\right) + \beta m c^2 + e\phi$

$$\boxed{x^\mu = (ct, \vec{x}) \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\partial_t, \vec{\nabla}\right)}$$

$A^\mu = (\phi, \vec{A}) \qquad p^\mu = \left(\frac{1}{c}E, \vec{p}\right)$

$*_1 \cdot \frac{\beta}{\hbar c}$ weil $\beta^2 = 1 \Rightarrow \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{e}{\hbar c}\gamma^\mu A_\mu - \frac{c}{\hbar} m\right)\psi = 0$

$\gamma^0 = \beta \qquad \gamma^i = \beta \cdot \alpha^i$

$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\, \mathbb{1}_{4\times 4}\, \delta_{ij}$

$\{\beta, \gamma\} = 0 \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad A_\mu = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ A \end{pmatrix}$

$$\boxed{\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2 g_{\mu\nu} \mathbb{1}_{4\times 4}}$$

γ sind 4×4 Matrizen die auf ψ wirken

ψ ist 4er Spinor – kein Index!

A_μ ist 4er Vektor – Index!

α, β hermitesch, $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$

$(\gamma^i) = \beta\alpha^i$

$(\gamma^i)^\dagger = \alpha^{i\dagger}\beta^\dagger = -\gamma^i$

$(\gamma^i)^2 = -\mathbb{1}$

$(\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$

$(\gamma^i)^{-1} = -\gamma^i$

γ sind nicht hermitesch, aber unitär! $(\gamma^\mu)^\dagger = (\gamma^\mu)^{-1}$

$\gamma^1_{4\times 4}\gamma^1_{4\times 4} = -\mathbb{1}_{4\times 4}$ // keine Summenkonv.

Lorentz Trafo: $\quad x'^\nu = L^\nu{}_\mu x^\mu$

$L^\nu{}_\nu \, , \left(\begin{array}{c|c} & \text{boost} \\ \hline & R \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} & E \\ \hline -E & B \end{array}\right)$ – // Emagn-Feld Vergleich

$$\underline{\partial_\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \partial'_\nu = \underline{L^\nu_\mu \partial'_\nu}$$

$\psi'(x') = \Lambda_{4\times 4} \psi(x)$ ist in anderem Raum als x^μ! (Spinor)

Dirac Gl. in neuen Koordinaten:

$$\left(i \gamma^\mu L^\nu_\mu \partial'_\nu - \frac{c}{\hbar} m\right) \Lambda^{-1} \psi' = \emptyset$$

// spezielle Potential $A_\mu = \emptyset$

// auf folgende Form bringen:

$$\left(i \gamma^\mu \partial'_\mu - \frac{c}{\hbar} m\right) \psi' = \emptyset$$

// obere Gl mit Λ mult.!

$$\Rightarrow \left(i(\Lambda \gamma^\mu \Lambda^{-1} L^\nu_\mu) \partial'_\nu - \underbrace{\frac{c}{\hbar} m}\right) \psi' = \emptyset$$

hier hebt sich $\Lambda \Lambda^{-1}$ auf wegen Skalar

$$\Rightarrow \Lambda \gamma^\mu \Lambda^{-1} L^\nu_\mu = \gamma^\nu \iff \boxed{\gamma^\mu L^\nu_\mu = \Lambda^{-1} \gamma^\nu \Lambda}$$

ähnlich siehe vorher: (9.58)

$$A^{-1} \sigma_i A = R_{ik} \sigma_k$$

<u>Infinitesimal</u>: $L^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu + \mathcal{O}(\omega^2)$

$$\omega_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} \omega^\rho_\nu = -\omega_{\nu\mu}$$

Vgl. E-Mag

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \vec{v}/c \\ \hline -\vec{v}/c & R_{ik} = \end{array}\right)$$

$\vec{E}$

$\varepsilon_{ijk} \vec{\mathcal{I}}$ — $\vec{B}$

// Drehung

$$\boxed{\Lambda = \mathbb{1} + \frac{1}{2} \omega_{[\mu\nu]} \Sigma^{[\mu\nu]} + \mathcal{O}(\omega^2)}$$

// Schauen, was die Summe ist...

?

$$\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} [\gamma^\rho, \Sigma^{\mu\nu}] = \omega^\rho_\nu \gamma^\nu = \omega_{\mu\nu} g^{\mu\rho}$$

Gleichung nach antisymmetrisieren ...

$$\Rightarrow \boxed{\cancel{\tfrac{1}{2}}[\gamma_\rho, \Sigma_{\mu\nu}] = \cancel{\tfrac{1}{2}}(g_{\rho\mu}\gamma_\nu - g_{\rho\nu}\gamma_\mu)}$$

$$\boxed{\Sigma_{\mu\nu} = a[\gamma_\mu, \gamma_\nu]} \qquad a = \frac{1}{4}$$

// Lsg wiedererraten

$$\gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu + 2 g_{\mu\nu} \mathbb{1}$$
$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2 g_{\mu\nu} \mathbb{1}$$

$$[\gamma_\rho, \Sigma_{\mu\nu}] = [\gamma_\rho, 2a\, \gamma_\mu \gamma_\nu + \dots \cancel{\mathbb{1}}]$$
$$= 2a[\gamma_\rho, \gamma_\mu \gamma_\nu] = *_1$$

Rechenregel: $[A, BC] = \{A, B\} C - B\{A, C\}$

hier hilfreich, gibt dieses VZ

$$\left.\begin{matrix} ABC \\ -BCA \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} ABC \,\|\, \pm BAC \\ -BCA \,\|\, \mp BAC \end{matrix}$$

$$*_1 = 2a(2 g_{\rho\mu}\gamma_\nu - \gamma_\mu 2 g_{\rho\nu})$$ mit $a = \frac{1}{4}$ ist Lsg erfüllt

→ Damit kennt man infint LT im Spin Raum (beinhalt. normale)

kann man auf normale Dreh. spezialisieren

<u>Alternative Herleitung (siehe K 7)</u>

ist Drehimpuls erhalten? $[H, L_i] \neq \emptyset$ → nein

$$L_i = \varepsilon_{ijk} x_j P_k \qquad = i\hbar c\, \varepsilon_{ijk} \alpha_j P_k = [H, -S_i]$$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \qquad S_i = \frac{\hbar}{4i} \varepsilon_{ijk} \alpha_j \alpha_k = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_i & \emptyset \\ \emptyset & \sigma_i \end{pmatrix}$$

// Gesamtdrehimp. bleibt erhalten, L nicht!

$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

ω auf räumlich spezialisiert

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{0} \\ \vec{0} & \underbrace{\varphi_j \varepsilon_{ijk}}_{R_{j\,ik}} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \mathbb{1} + \frac{1}{2}\omega_{ij}\Sigma^{ij}$$

$$\gamma^i \gamma^j = \beta\alpha^i \beta\alpha^j$$

$$= -\alpha^i \alpha^j$$