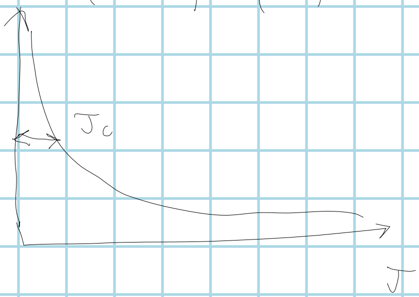
Statistische Physik II 4.11.08

$A(\ldots)\, A(\ldots)$? Konsistenz Bedingung



$$H = \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$$

$$\left\langle \frac{1}{2} m v_x^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v_y^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v_z^2 \right\rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

$$\langle H \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\langle H \rangle_N = \frac{3}{2} N k_B T$$

// Oszillator $$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$\langle H \rangle = 6N \frac{1}{2} k_B T = 3N k_B T$$

Wärmebad & mikroskop. Teilchen tauschen Energie aus

Annahme: $\langle A(0)\, A(t) \rangle = A^2 \delta(t)$

kann aber auch anders sein!

γ : Dissipation d. Reibung irreversibel

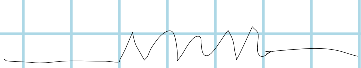
rechter Term : Fluktuation um GGW reversibel

Energie konstant $\rightarrow$ GGW

Verbindet einen irreversiblen & einen reversiblen Prozess

Nyquist Theorem (Rauschen)

Widerstand



$$U = I \cdot R$$

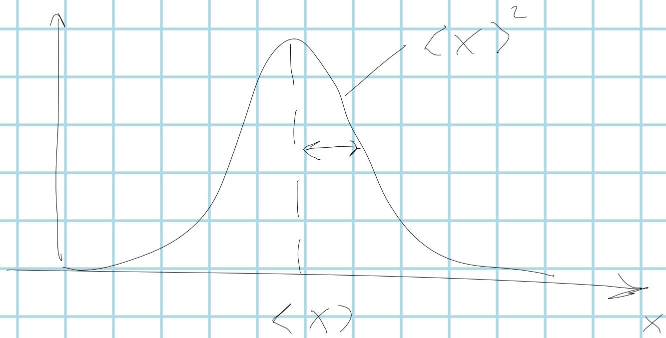
Widerst. ist im therm. GGW Rauschen bewirkt Unsicherheit:

$$\underset{\sim}{(\Delta U)^2} \sim 4 k_B T \underset{\sim}{R}$$

Widerstand $\sim$ Reibung von früher

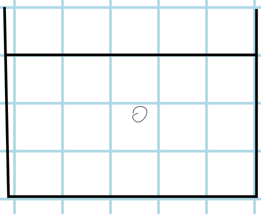
$$\underset{\sim}{A^2} = 2 k_B T \frac{1}{M} \underset{\sim}{\tilde{\gamma}}$$

Verteilung im Ortsraum anschaun



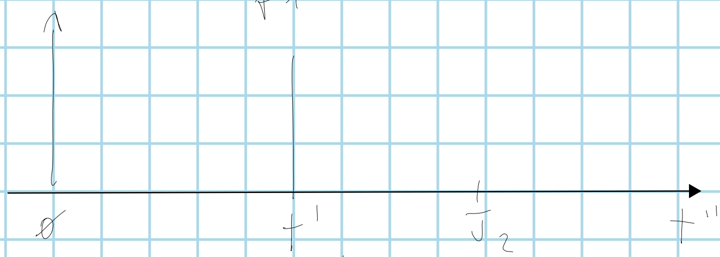
Diffus. in Brownscher Bew.:

$$x(t) = \underbrace{x(\emptyset)}_{\substack{\emptyset \\ \text{gesetzt}}} + \int_0^t v(\tau)\, d\tau$$

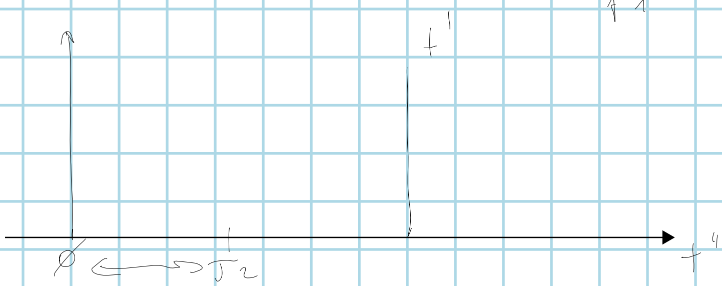


$$A^2 \int_0^{\tau_1} dt' \int_0^{\tau_2} dt'' \underbrace{e^{\tilde{\gamma}(t'+t'')} \delta(t''-t')}_{f_1}$$

1. Fall



$$f_1 = e^{\tilde{\gamma} 2t'}$$



2. Fall $f_1 = \emptyset$

// wieder 2 Einteilungen ?

① $\tau_1 < \tau_2$

$0 < t' < \tau_1 < \tau_2$

$A^2 \int_0^{\tau_1} dt' \, e^{\tilde{\gamma} 2t'}$

② $\tau_2 < \tau_1$

$\int_0^{\tau_1} dt' = \boxed{\int_0^{\tau_2} dt'} + \underbrace{\int_{\tau_2}^{\tau_1} dt'}_{t' > \tau_2}$

braucht man nicht ?

mit 1. Fall f_1

mit f_1

$= \cancel{0}$

$$\int_0^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2 = \underbrace{\int_0^{\tau_2} d\tau_1 \int_0^t d\tau_2}_{\tau_1 < \tau_2} + \underbrace{\int_{\tau_2}^t d\tau_1 \int_0^t d\tau_2}_{\tau_2 < \tau_1}$$

$\rightarrow e^{-\tilde{\gamma}(\tau_2 - \tau_1)}$ $\qquad \rightarrow e^{-\tilde{\gamma}(\tau_1 - \tau_2)}$

$\lim t \rightarrow \cancel{0}$

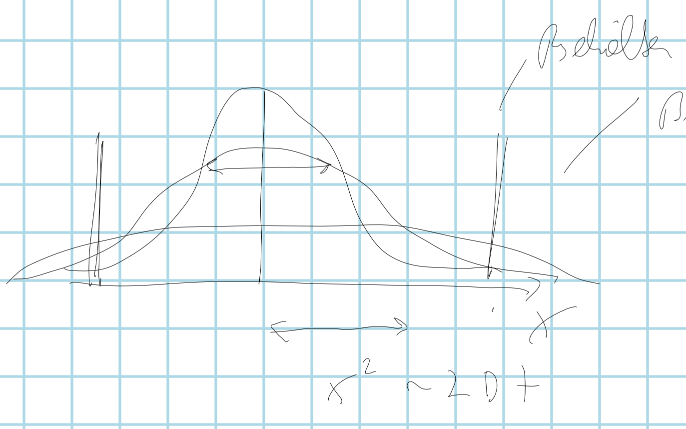
// Entwickeln

$$\left(e^{-\tilde{\gamma} t} - 1\right) \rightarrow -\tilde{\gamma} t + \frac{1}{2}(\tilde{\gamma} t)^2 + O(t^3)$$

$$\left(e^{-\tilde{\gamma} t} - 1\right)^2 \longrightarrow (\tilde{\gamma} t)^2 + O(t^3)$$

// Ergebnis wie f. freies T muss rauskommen

Prozess ist nicht stationär



hier haben wir aber einen Behälter → keine unendliche Ausdehnung!

Breite ist $\propto t$!!

Einstein-Rel.

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{M}$$

$$\boxed{D = \frac{k_B T}{\gamma}}$$

$$\langle v(t)\, v(t+\tau)\rangle \sim \frac{A^2}{2\tilde{\gamma}}\, e^{-\tilde{\gamma}\tau}$$ // stationärer Limes

$$D = \int_0^\infty \frac{A^2}{2\tilde{\gamma}}\, e^{-\tilde{\gamma}\tau}\, d\tau = \frac{A^2}{2\tilde{\gamma}^2}$$ // Fluktuation im Geschwind.k. Raum

1.4) Markov Prozess

W: WS ein T in $(x_1, x_1 + dx)$ zu finden

W_2: Verbund WS — WS ist zuerst bei t_1 (x_1), dann bei t_2 (x_2)

$$W(x_2, t_2) = \int dx_1\, W_2(\ldots)$$

P: Bedingte WS ! (nur von Zeitdiff. abh.)

$$W_2() = W()\, P()$$

$$\rightarrow W = \int dx_1\, W()\, P()$$

$$\frac{d}{dt} v = -\tilde{\gamma} v + A(t)$$

$$\frac{v(t+\tau) - v(t)}{\tau} = -\tilde{\gamma}\, v(t) + A(t)$$

$$\rightarrow v(t+\tau) = v(t) - \tilde{\gamma}\tau\, v(t) + \tau A(t)$$

Bsp.:

$$\frac{x(t+2\tau)-x(t+\tau)}{\tau} = (1-\tilde{\gamma}\,\tau)\,\frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} + \tau A(t)$$

$$x(t+2\tau) = x(t+\tau) + \tau(1-\tilde{\gamma}\tau)\,\frac{1}{\tau}\big(x(t+\tau)-x(t)\big) + \tau^2 A(t)$$

Nicht Markov-Prozess

Ortsraum

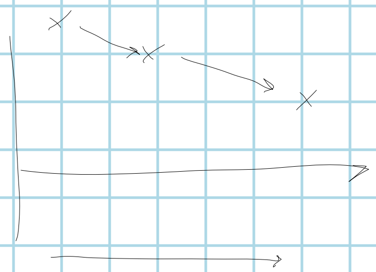
$$\frac{d^2}{dt^2}x = -\tilde{\gamma}\,\frac{d}{dt}x - A(t)$$

// man braucht 2 Zeitschritte (Diff reicht nicht mehr)

$$(x(t),\, v(t))$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\gamma v + A(t) \end{cases}$$

Ob stochastisch od. determ. bzw. Markov od. nicht hängt ab, welche Variable man beobachtet!!



wenn man mehr Schritte macht, vergisst man die vorherigen Orte

1.5) Fokker Planck Gl.

Liouville Gl. $\frac{\partial}{\partial t} W(x,p,t) = -\{W, H\}$

Es ist kein Hamilton System → Liouville kann man nicht verwenden!

Brown ist Markov im Geschwindigk.-Raum!

$\rightarrow$ $w(v, t + \Delta t)$

Reihen Entw. von w & P

$w = \int d(\Delta v) \ldots$ // Ausintegrieren

Koeff-Vergl.

$\rightarrow$ Fokker Planck-gl.

$\partial_t w(v,t) = -\partial_v (a_1(v)\, w(v,t)) + \ldots$

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{w(v, t+\tau) - w(v,t)}{\tau}$$