Statistik II 11.11.08

Bsp: Brown'sche Bew $\longrightarrow$ Fokker Planck Gl

$$w(v+\Delta v, t) \simeq w(v,t) + \dots + O((\Delta v)^3)$$

$$P(v+\Delta v - \Delta v, t) \simeq \dots + O(\text{--''--})$$

?

$$\partial_t w = \partial_v(\alpha_1 w) + \frac{1}{2}\partial_v^2(\alpha_2 w) + \frac{1}{3!}\partial_v^3(\alpha_3 w)$$

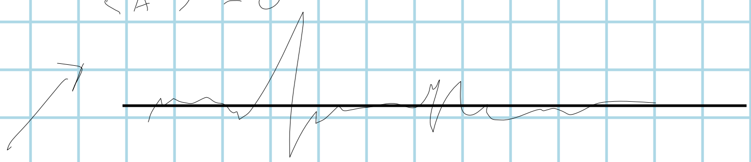
$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha_3(v) = \lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{\langle(\Delta v)^3\rangle}{\tau} = \emptyset & \\ \alpha_4(v) = \emptyset & (4 \geq 3) \end{array}\right.$$

$$\langle(\Delta v)^3\rangle = -\cancel{\tilde{\gamma}^3 v^3 \tau^3} + 3\tilde{\gamma}^2 v^2 \tau^2 \int_t^{t+\tau} \underbrace{\cancel{\langle A(t')\rangle}}_{=\emptyset} dt'$$

$$-3\tilde{\gamma} v \tau \int_t^{t+\tau}\int_t^{t+\tau} \underbrace{\langle A(t') A(t'')\rangle \, dt' \, dt''}_{A^2\tau \to \emptyset}$$

$$+\iiint_t^{t+\tau} \underbrace{\langle A(t') A(t'') A(t''')\rangle}_{\langle A^3\rangle = 0} \, dt' \, dt'' \, dt'''$$

Fluktuation um MW



Viele Flkt sind Gauss verteilt

Argument warum 3. Term verschwindet

Höhere als 2. Ordnung verschwinden $\longrightarrow$ Fokker Planck bis 2. Grad

Anfang: $\alpha_1(v) = \lim\limits_{\tau\to 0}\dfrac{\langle\Delta v\rangle}{\tau}$

Wechselw. zwischen T. vernachlässigt

$$\boxed{D = \lim_{\tau \to 0} \frac{\langle (\Delta x)^2 \rangle}{2\tau}}$$ // Diffusionskonst.

gehört dazu?

$$\langle \Delta v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta v)\, \Delta v\, P(v, \Delta v, \tau) \quad \Big\| \quad - \tilde{\gamma} v \tau \underbrace{\int d(\Delta v)\, P(v, \Delta v, \tau)}$$

$$\underbrace{\int_t^{t+\tau} \langle A(t') \rangle \, dt'}_{= 0}$$

$$\boxed{\langle v^2 \rangle = \frac{k_B T}{m}}$$

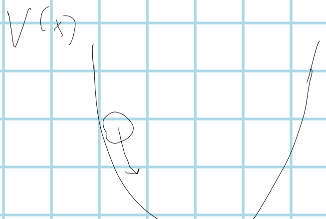
Anwendung: Geschwindigkeitsvert. d. Fokker Planck Fkt

Analog: Ortsverteilungsfkt ..

$- \tilde{\gamma} v$ // Reibung $\qquad -\frac{V'}{M}$ // Kraft von Poti

$A(t)$ // Fluktuierende

Bsp: harmonische Falle



$$\partial_t v = \partial_t^2 x$$

Kein Markov Prozess, da 2. Ableitg

$$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}}$$

Starke Reibung $\partial_t v = 0$

Langevin Gl: $\tilde{\gamma} v = -\frac{V'(x)}{M} + A(t)$

$\tilde{\gamma} \partial_t x =$ —— " ——

Jetzt nur mehr 1. Ordng. Ableitg

Langevin ohne Poti: $\partial_t v = -\tilde{\gamma} v + A(t)$

DGL 1. Ordnung aber in v!!

Ok für Impulsraum

α_i: i tes Sprungmoment

Fokker Planck Gl. f. Ortsverteilungsfkt

$$P(x, \Delta x', \Delta t) = p(x) \cdot \Delta t\, \delta(\Delta x' - \Delta x)$$ Bew nach links

$$+ q(x)\, \Delta t\, \delta(\Delta x' + \Delta x)$$ Bew nach rechts

WS f. ←

$$+ \underbrace{(1 - p(x)\,\Delta t - q(x)\,\Delta t)}_{\text{Rest (Bleibt stehen)}}\, \delta(\Delta x')$$

WS f →

$$\begin{cases} \alpha_1 = (p(x) - q(x))\, \Delta x \\ \alpha_2 = (p(x) + q(x))\, \Delta x^2 \end{cases}$$

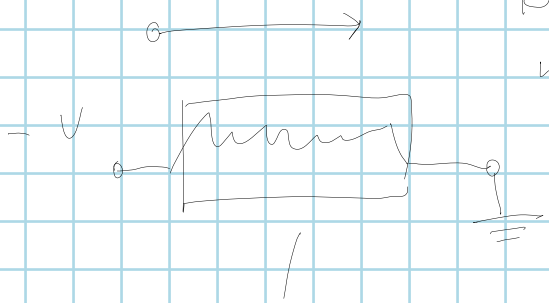
wenn $p = q$

$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 2D$

Diffusions Gl:

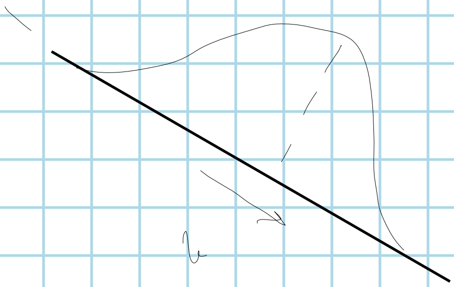
$$\partial_t w = D\, \partial_x^2 w$$

$$X = \frac{x}{\sqrt{2Dt}} \longrightarrow w(X, t) \approx e^{-\frac{1}{2}X^2}$$



Kraft ähnlich wie bei Neigung

durch Potential



Widerstand / Nyquist Theorem

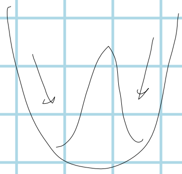
Elektronenströmung im Widerst. folgt Brown-schen Bew.

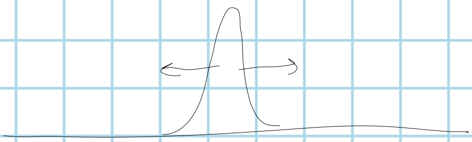
Stationäre Lsg: $W(x,t) \sim e^{-\beta V(x)}$

Impulse: — $W(v,x,t) \sim e^{-\beta H}$

$= e^{-\beta(\frac{1}{2} m v^2 + V(x))}$ $*_1$

$*_1$ $W(x,t) = \int dv \; W(v,x,t) \sim e^{-\beta V(x)}$





Im Raum (v, x)

$\frac{\langle \Delta v \rangle}{\tau} = -\bar{\gamma} \tau$ $\qquad$ $\frac{\langle \Delta v^2 \rangle}{\tau} = 0$ $\qquad$ // alle drei Potential

$\frac{\langle \Delta x \rangle}{\tau} = v$ $\qquad$ $\frac{\langle \Delta x \, \Delta v \rangle}{\tau} = \emptyset$

$\frac{\langle \Delta v^2 \rangle}{\tau} = 2D$

2) Transporttheorie

// Gauss

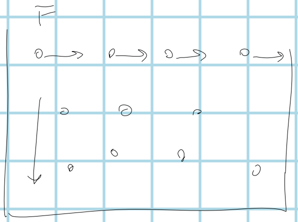
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V n(\vec{r}, t) \, dV = - \int_V \vec{\nabla} \vec{j} \, d^3 r = - \int_{\partial V} \vec{j} \, \vec{n} \, dS$$

Dichte $\qquad$ Norm-Vektor

Wärmekapazität $[\bar{c}_p] \sim \frac{J}{K \, m^3}$

System ist in GGW $\qquad$ c_p fast homogen

Spannungstensor



Rest hat mit Viskosität zu tun

$$\begin{pmatrix} \Pi_{xx} & \Pi_{xy} & \Pi_{xz} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

p

Π_{xy}

Richtung d. Kraft

Richtung d. Masse-Transport

Transportkoeffizienten