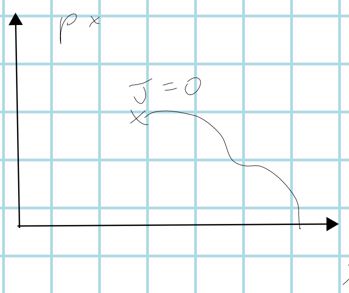
Statistische Physik II   Dienstag 21.08.

1) Stochastic Process

Opposite: deterministic process

phase space

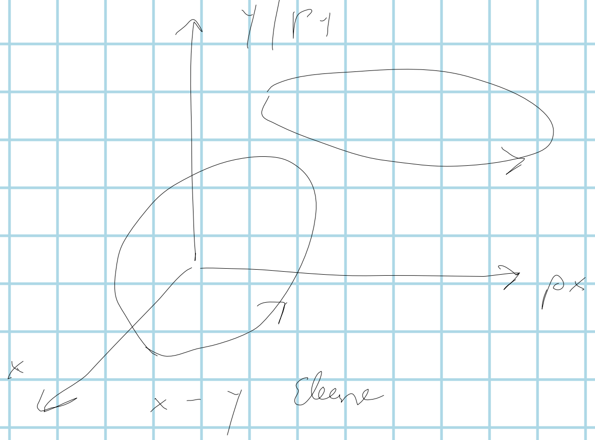


deterministisch: Startpunkt vorgegeben → nur 1 Weg

stochastisch: 1 Startpunkt, mehrere Möglichkeiten

Trajektorien: mehrdim.

// stochastisch

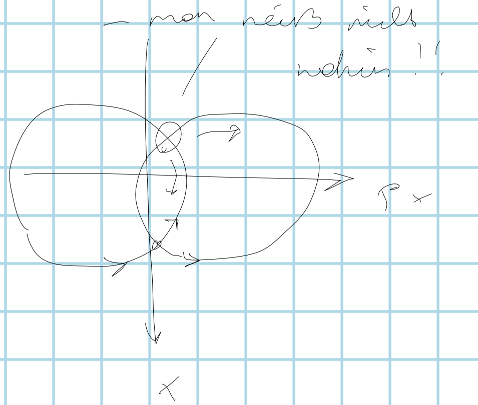


Projection

$\Longrightarrow$

information loss

backward in time – man weiß nicht wohin!!



an dem Punkt weiß man nicht was weitergeht

stochastisch: nicht zeit-reversible

Fluktuationen: WW mit unberechenbaren Freiheitsgraden

Mittelung hebt kleine Fluktuationen auf

Temperatur: Die Mittelung kann man als dyn. Prozess sehen

→ berechenbar

Man sieht sich nur die Fluktuationen an!

Woher kommen die unbekannten FG?

Mehrkörperproblem

$H = \ldots$

gesamten Raum → deterministic BWGL lösen

$N \gg 1$ schwierige Rechnung

FG

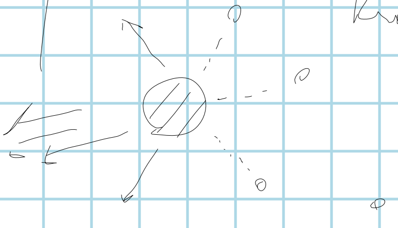
HF mit reduz. FG

$$H = H_1(r_1, p_1) + \underbrace{V_{int}(r_1, p_1, t)}_{\text{mittlere WW}}$$

isol. N-Teilchen System → 1-Teilch System in Umgebung

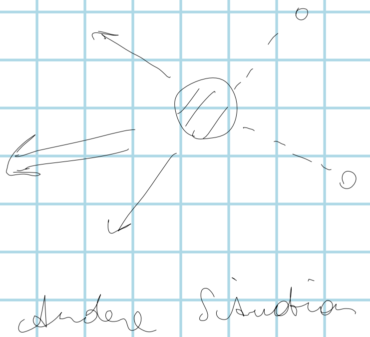
average interaction

Summe über alle Kräfte



original system

stochastisch:



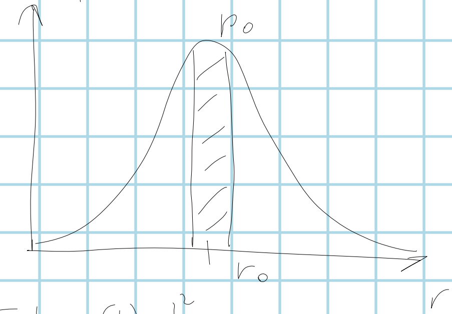
Andere Situation, average schaut in gleiche Richtung

⇒ man weiß nicht wo Teil. waren

Stochast. Prozess als Näher. d. Quantendyn.

$|\psi(t=0)\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle$ Zeitentw. deterministisch

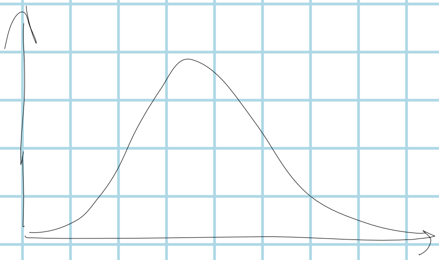
$|\langle r|\psi(t)\rangle|^2$



Man kann die Position nur mit nur mit Wahrsch. bestimmen

→ stochastisch

$|\langle E|\psi(t)\rangle|^2$



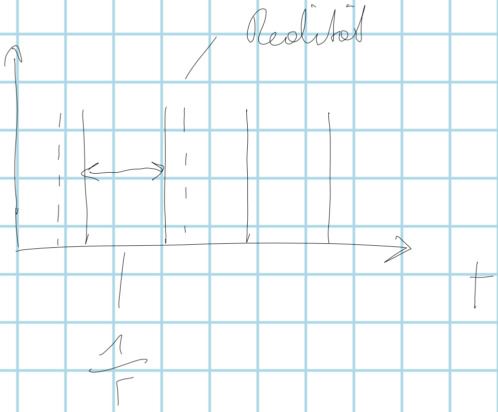
Messung ist Projektion auf Unterraum →

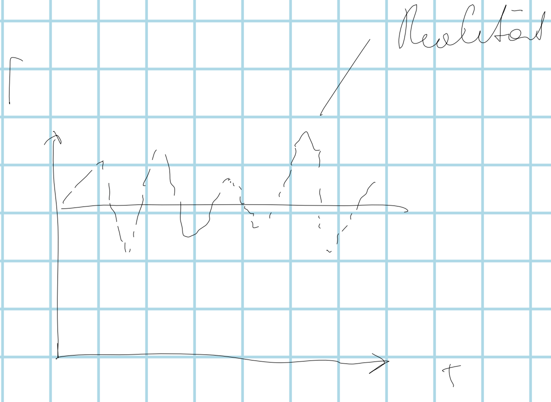
es wird ein stochastischer Prozess!

Bsp: Alphazerfall

Zeitintervall zwischen 2 Detektionen ist stochastisch!

Zerfallsrate $\Gamma = \text{const}$



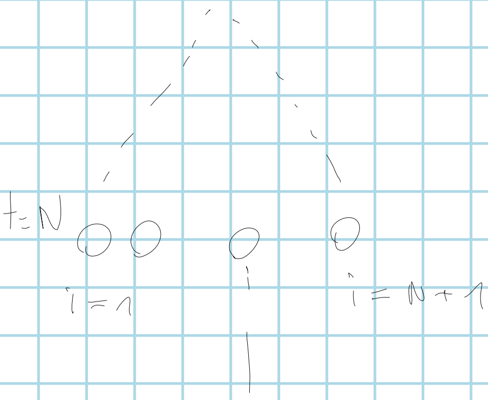


Random Walk

eh klar!!

Zeitentwicklung der Verteilung

Wahrscheinlichkeit der Wege berechnen!



$$\frac{{}_N C_{i-1}}{2^N}$$

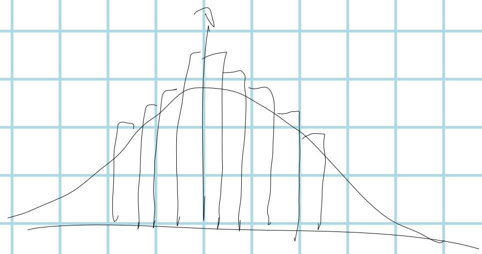
$n \times j$

$T \times k$

$j + k = N$

$j - k = \left(\frac{N+1}{2} + i\right)$?

$t \to \infty \Rightarrow$ Gauss



Dieser Prozess ist diskret

$\longrightarrow$ smooth out the proc $\longrightarrow$ continuous limit (Gauss)

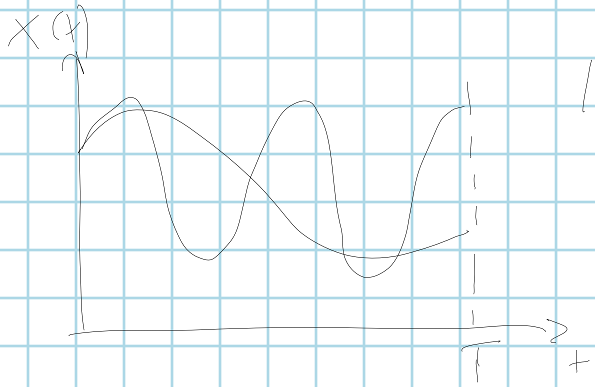
Länge $\longrightarrow \infty$

Eigenschaften von stoch. Proc

Frequenz & Amplitude der Fluktuation feststellen

wichtige Werkzeuge: Fourier Entwicklung

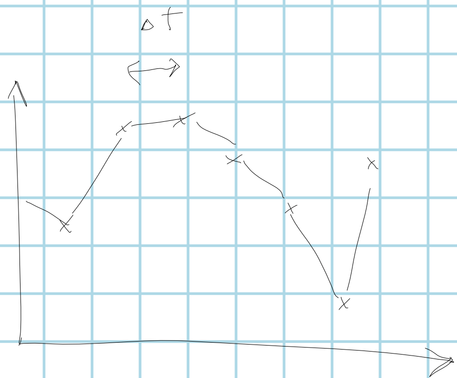
(hier diskret)



// 2 Frequenzen

Summe $n = -\infty$ bis $+\infty$

Messungen: nur Punkte



$n \leq n_{max}$

Δt beschränkt die maximale Frequenz!

$\omega_{max} \leq \frac{2\pi}{\Delta t}$!!

Zeitmittel:

$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt$ // Fourier-Entw. einsetzen!

$n \neq 0$:

$\langle \exp(i\omega_n t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega_n t}\, dt$

$= \frac{1}{T} \left(\frac{e^{i\omega_n t}}{i\omega_n} \right)_0^T = \frac{1}{T} \frac{e^{\overbrace{i\omega_n T}^{= 2\pi n}} - 1}{i\omega_n} = \emptyset$

wenn $\omega_n T = 2\pi n$

dann $\mathrm{Exp} = \emptyset$

$n = 0$: $= \frac{1}{T} \int_0^T dt = 1$

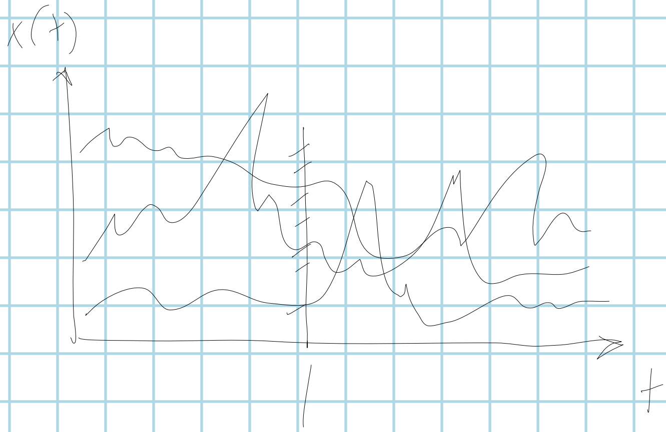
Ensemblemittel

$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j(t)$ $\longrightarrow$ Fourier einsetzen

a_n^j ist abhängig von Trajektorie

$\langle a_n \rangle$: Ensemble average

Verteilungsfkt $w(x, t)$



mehrere Trajektorien

Verteilung gibt an wie Trajektorien an 1 Punkt sind

stationärer Prozess $W(x,t) = W(x)$

$\langle x(t)\rangle_T = \text{const}$

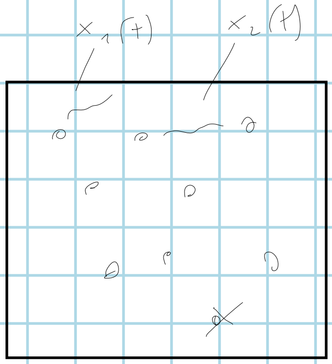
Inverse Fourier Trafo:

$$\langle a_n\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \langle x(t)\rangle e^{-i\omega_n t}\, dt = 0 \quad \text{wenn } n \neq 0$$

sonst $\langle a_0\rangle = \langle x(t)\rangle$

Ergodischer Prozess:

Zeit & Ensemblemittel sind gleich!

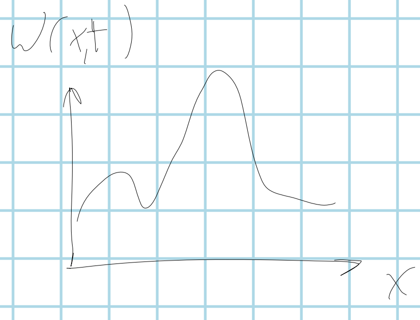


$\langle x(t)\rangle$

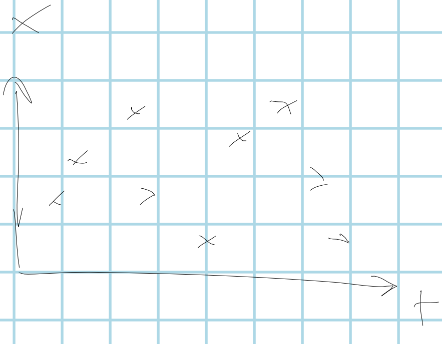
Oft Ensemblemittel messbar

nur

oder

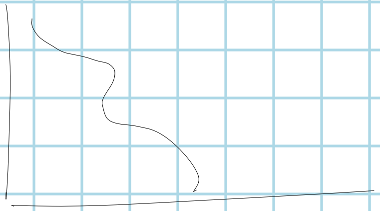


Oder nur 1en messen



um 1 rechnen und Weganschauen

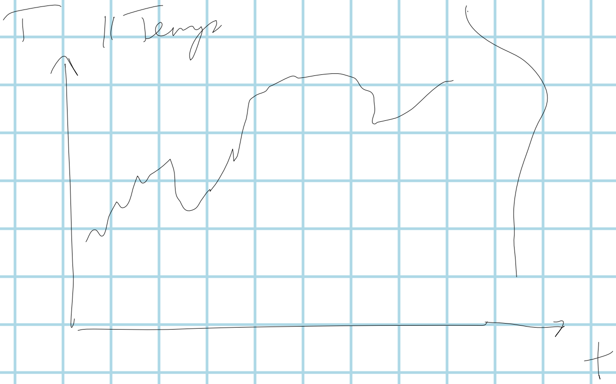
$\Rightarrow$



Vorhersagen von System:

Bei ergodischen die Verteilung aufstellen!

gemessen



stationär:

$\langle x(t) \rangle = \text{const}$ keine Fluktuation

<u>Spektrale Dichte Funktion</u> (Power spectrum)

welche Frequenzbereiche dom. Prozess?

$x(t) \rightarrow E(t)$ // E-Feld

$E^2(t)$

kommt in Energie vor!

} zum Beispiel

$$\langle |x(t)|^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j(t) \, x_j^*(t)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^j_n e^{i\omega_n t} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a^{j*}_m e^{-i\omega_m t} \right)$$

stationär: $w(x,t) = w(x)$

$\langle |x(t)|^2 \rangle = \int dx \, x^2 \, w(x,t) = \text{const}$ // dann

$$\langle a_n a_m^* \rangle = \frac{1}{T} \sum_n \int_0^T \underbrace{\langle |x(t)|^2 \rangle}_{\text{const}} e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} \, dt$$

$$= \delta_{n,m} \langle |x(t)|^2 \rangle \qquad \omega_n - \omega_m = \frac{2\pi(n-m)}{T}$$

$$= \delta_{n,m} \langle |a_n|^2 \rangle \qquad // \; n = m \; ?$$

irgendwas falsch!